

$$w = f(x, y, z); \equiv F(x, y, z, w) = 0; \quad (1)$$

$$w = g(x, y, z); \equiv G(x, y, z, w) = 0; \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w} \right) = r_1(\nabla f, -1); \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial w} \right) = r_2(\nabla g, -1); \quad (4)$$

defined elsewhere

**Cálculo Multivariado**    **Lista numero 1**  
**IntegralDerivada**        **tarcisio.praciano@gmail.com**  
T. Praciano-Pereira        **Sobral Matemática**

**alun@:**

---

---

6 de agosto de 2019

**UeVA**

Produzido com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

sis. op. Debian/GNU/Linux

---

---

[www.multivariado.sobralmatematica.org/](http://www.multivariado.sobralmatematica.org/)



Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

**Exercícios 1** *integral, derivada e limite*

**objetivo:** *Integral, derivada e limite*

*Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta gabarito você encontra o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. Entretanto é possível que gabarito esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.*

*Você pode usar o programa [3, `riemann.calc`] para testar os seus cálculos. Edite a definição das funções e rode o programa com [2, Licença, GPL]. Sugiro a leitura do livro do Courant [1].*

**palavras chave:** **Integral, derivada, limite.**

1. Limite de sucessões

A definição de que uma sucessão  $(a_k)$  converge para o número  $a \in \mathbf{R}$  é

$$(2) \quad \underline{(V)}[ ](F)[ ]$$

$$\exists \epsilon \forall n \in \mathbf{N} \text{ tal que } k > n \Rightarrow |a_k - a| < \epsilon \quad (5)$$

( 3 ) (V)[ ](F)[ ]

$$\exists \epsilon \forall \delta > 0; \text{ tal que } k > \delta \Rightarrow |a_k - a| < \delta \quad (6)$$

( 5 ) (V)[ ](F)[ ]

$$\forall k \exists \delta > 0; \text{ tal que } k > \delta \Rightarrow |a_k - a| < k \quad (7)$$

( 7 ) (V)[ ](F)[ ]

$$\epsilon \delta > 0; \exists N \in \mathbf{N} \text{ tal que } k > N \Rightarrow |a_k - a| < \epsilon \quad (8)$$

( 11 ) (V)[ ](F)[ ]

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N} \text{ tal que } k > n \Rightarrow |a_k - a| < \epsilon \quad (9)$$

gabarito: \_\_\_\_\_

## 2. Limite de sucessões

Se uma sucessão  $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$  for limitada ela pode ser divergente como mostra o exemplo que voce vai escolher:

( 2 ) (V)[ ](F)[ ]

$$a_k = \frac{1}{k+1} \quad (10)$$

( 3 ) (V)[ ](F)[ ]

$$a_k = \frac{k-1}{k+1} \quad (11)$$

( 5 ) (V)[ ](F)[ ]

$$a_k = \frac{k}{k+1} \quad (12)$$

( 7 ) (V)[ ](F)[ ]

$$a_k = (-1)^k \quad (13)$$

( 11 ) (V)[ ](F)[ ]

$$a_k = (-1)^k \frac{k}{k+1} \quad (14)$$

gabarito: \_\_\_\_\_

## 3. topologia do plano $M$ é um subconjunto do $\mathbf{R}^2$

( 2 ) (V)[ ](F)[ ]  $(a, b)$  é um ponto interior de  $M$  se e somente se para qualquer seja  $\epsilon > 0$  existe um ponto  $(p, q) \in M$  tal que

$$(p, q) \neq (a, b) \text{ tal que } |a - p| < \epsilon \text{ e } |b - q| < \epsilon \quad (15)$$

e usei distância de  $l^\infty$ .

( 3 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ](a, b)$  é um ponto interior de  $M$  se e somente se houver  $\epsilon > 0$  e existir um ponto  $(p, q) \in M$  tal que

$$(p, q) \neq (a, b) \text{ e } |a - p| < \epsilon \text{ e } |b - q| < \epsilon \quad (16)$$

e usei distância de  $l^\infty$ .

( 5 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ](a, b)$  é um ponto interior de  $M$  se e somente se para qualquer seja  $\epsilon > 0$  existe um ponto  $(p, q) \in M$  tal que

$$(p, q) \neq (a, b) \text{ tal que } |a - p| > \epsilon \text{ e } |b - q| > \epsilon \quad (17)$$

e usei distância de  $l^\infty$ .

( 7 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ](a, b)$  é um ponto interior de  $M$  se e somente se para qualquer seja  $\epsilon > 0$  e para todo ponto  $(p, q) \in M; (p, q) \neq (a, b)$  se tenha

$$\text{tal que } |a - p| < \epsilon \text{ e } |b - q| < \epsilon \quad (18)$$

e usei distância euclidiana.

( 11 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ](a, b)$  é um ponto interior de  $M$  se e somente se para qualquer seja  $\epsilon > 0$  existe um ponto  $(p, q) \in M, (p, q) \neq (a, b)$  tal que

$$\sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2} < \epsilon \quad (19)$$

e eu usei a distância euclidiana.

gabarito:

-----

#### 4. topologia do plano

$M$  é um conjunto compacto do  $\mathbf{R}^2$ .

( 2 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ]$  qualquer que seja a cobertura por abertos de  $M$  existe uma subcobertura finita de  $M$ .

( 3 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ]$  toda cobertura por abertos de  $M$  é uma cobertura finita de  $M$ .

( 5 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ]$  toda cobertura por abertos de  $M$  é uma cobertura com uma infinidade de abertos de  $M$ .

( 7 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ]$  toda cobertura por abertos de  $M$  é uma cobertura finita de abertos de  $M$ .

( 11 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ]$  Se houver uma uma cobertura finita de abertos de  $M$  então também tem uma expansão desta cobertura com uma quantidade infinita de abertos de  $M$ .

gabarito:

-----

#### 5. derivada

Defina a derivada de  $f(x) = \log(2x); x > 0$ ;

( 2 )  $\underline{(V)}[\ ](F)[\ ] f'(x) = \frac{1}{x}; x > 0$ ;

- ( 3 ) (V)[ ](F)[ ]  $f'(x) = \frac{1}{2x}; x > 0;$   
 ( 5 ) (V)[ ](F)[ ]  $f'(x) = \frac{x}{2x}; x > 0;$   
 ( 7 ) (V)[ ](F)[ ]  $f'(x) = \frac{x}{2}; x > 0;$   
 ( 11 ) (V)[ ](F)[ ]  $f'(x) = \frac{2}{x}; x > 0;$

gabarito: \_\_\_\_\_

6. integral e derivada

$f$  é uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ .

- ( 2 ) (V)[ ](F)[ ]  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  é uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ .  
 ( 3 ) (V)[ ](F)[ ]  $f$  é uma função uniformemente contínua no intervalo  $[a, b]$ .  
 ( 5 ) (V)[ ](F)[ ]  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  é uma função diferenciável no intervalo  $[a, b]$ .  
 ( 7 ) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  é  $f(x)$   
 ( 11 ) (V)[ ](F)[ ]  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  é uma função integrável no intervalo  $[a, b]$ .

gabarito: \_\_\_\_\_

7. integral, derivada e limite A solução da equação  $5^{3x}2^x = 5\sqrt{10}$  é

- ( 2 ) (V)[ ](F)[ ]  $x = 2 \log(3)$   
 ( 3 ) (V)[ ](F)[ ]  $x = 3 \log(2)$   
 ( 5 ) (V)[ ](F)[ ]  $x = \log(\frac{3}{2})$   
 ( 7 ) (V)[ ](F)[ ]  $x = \log(\frac{1}{2})$   
 ( 11 ) (V)[ ](F)[ ]  $x = \frac{1}{2}$

gabarito: \_\_\_\_\_

8. integral, derivada e limite

Indique quando o limite estiver sido calculado corretamente

- ( 2 ) (V)[ ](F)[ ]  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) \sin(\frac{2}{x})) = 0$   
 ( 3 ) (V)[ ](F)[ ]  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) \sin(\frac{2}{x})) = 1$   
 ( 5 ) (V)[ ](F)[ ]  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) \sin(\frac{2}{x})) = \frac{1}{2}$

( 7 ) (V)[ ](F)[ ]  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) \sin(\frac{2}{x})) = \frac{1}{\pi}$

( 11 ) (V)[ ](F)[ ]  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) \sin(\frac{2}{x})) = \frac{1}{e}$

gabarito: \_\_\_\_\_

9. integral Determine uma primitiva  $F$  de  $f(x) = \sqrt{x} \log(x)$

( 2 ) (V)[ ](F)[ ]

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \log(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + \frac{4}{9};$$

( 3 ) (V)[ ](F)[ ]  $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \log(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + \frac{2}{9};$

( 5 ) (V)[ ](F)[ ]  $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \log(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + \frac{1}{9};$

( 7 ) (V)[ ](F)[ ]

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \log(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} - \frac{1}{9};$$

( 11 ) (V)[ ](F)[ ]  $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \log(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} - \frac{2}{9};$

gabarito: \_\_\_\_\_

10. integral Calcule  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x) dx$

( 2 ) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})}{2}$

( 3 ) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})}{4}$

( 5 ) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})}{6}$

( 7 ) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})}{8}$

( 11 ) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})}{10}$

gabarito: \_\_\_\_\_

# Índice Remissivo

- cobertura por abertos, 3
- compacto
  - conjunto, 3
- conjunto
  - compacto, 3
- continuidade
  - uniforme, 4
- derivada, 3, 4
- desigualdade
  - limite, 4
- diferenciabilidade, 4
- equação
  - logarítmica, 4
- fronteira, 2
- função
  - contínua, 4
- integral, 4, 5
  - derivada, 4
  - por partes, 5
- limite, 4
- logaritmo, 3, 4
- ponto
  - de acumulação, 2
  - fronteira, 2
- primitiva, 5
- subcobertura, 3
- sucessão
  - convergente, 2
  - limitada, 2
- sucessões
  - limite, 1
  - zero, 2
- teorema
  - fundamental
    - do Cálculo, 4
  - topologia
    - do plano, 2
  - topologia do plano, 3

# Referências Bibliográficas

- [1] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.
- [2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, <http://www.isthe.com/chongo/>, 2011.
- [3] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, <http://www.calculo-numeric.sobralmatematica.org/programas/>, 2009.