Cálculo Univariado integral **Lista numero 31**
tarcisio@SobralMatematica.org
T. Praciano-Pereira **Sobral Matemática**

alun@:

17 de setembro de 2017 **Cálculo**
Produzido com LaTeX sis. op. Debian/GNU/Linux
`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta **gabarito:** você encontra o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. Entretanto é possivel que *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 1 *integral*
objetivo: *a integral e sua interpretação*
palavras chave: integração, primitiva, condição inicial.

1.

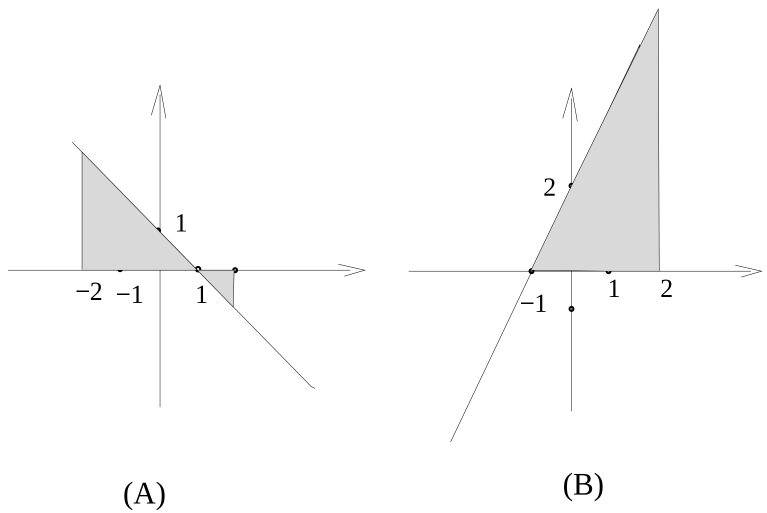

Figura 1: funções e integral

Interpretação geométrica da integral

(2) (V)[ ](F)[ ] *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(A)** *representa a integral* $\int_0^2 x dx$.

(3) (V)[ ](F)[ ] *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(A)** *representa a integral* $\int_{-2}^2 (x+1)dx$ *e o valor desta integral é 10.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(A)** *representa a integral* $\int_{-2}^2 (-x+1)dx$ *e o valor desta integral é 4.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(B)** *representa a integral* $\int_{-2}^2 (2x+2)dx$ *e o valor desta integral é 8.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(B)** *representa a integral* $\int_{-1}^2 (2x+2)dx$ *e o valor desta integral é 9.*

gabarito: *55*

2. *Propriedades da integral* *Represente geometricamente as integrais para acompanhar o cálculo.*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int_{-5}^{3} f = 0$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int_{-5}^{3} f < 0$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int_{3}^{-5} f > 0$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int_{3}^{5} f < 0$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int_{3}^{5} f > 0$

gabarito

3. *O cálculo de algumas integrais* *Represente geometricamente as integrais para acompanhar o cálculo.*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x$ *então* $\int_{5}^{-3} f = \frac{f(-3)+f(5)}{2}(5-(-3)) > 0$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x$ *então* $\int_{5}^{-3} f = \frac{f(-3)+f(5)}{2}(-3-5) < 0$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se* $g(x) = -x$ *então* $\int_{-3}^{5} g = \frac{g(-3)+g(5)}{2}(5-(-3)) < 0$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x$ *então* $\int_{a}^{b} f = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) > 0$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x$ *então* $\int_{a}^{b} f = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$ *mas o sinal depende dos valores de a e de b.*

gabarito:

4. *O cálculo de algumas integrais* *Represente geometricamente as integrais para acompanhar o cálculo.*

(2) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_0^{10} -x dx = -50$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x$ *então* $\int\limits_0^a f(x)dx = F(a) = \frac{a^2}{2}$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x+3$ *então* $\int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^a xdx + \int\limits_0^a 3dx$ *é a soma das áreas dum triângulo e dum retângulo.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x+3$ *então* $\int\limits_{-3}^5 f(t)dt = \frac{f(-3)+f(5)}{2}(5-(-3))$ *usando a fórmula da área de trapézios.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = x+3$ *então* $\int\limits_a^b f(s)ds = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$ *é uma aplicação da fórmula da área de trapézios.*

gabarito: 2310

5. *Cálculo da integral*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = mx$ *então* $\int\limits_0^a f(t)dt = \frac{f(a)+f(0)}{2}a = m\frac{a^2}{2}$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = 3x$ *então*

$$\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx = \int\limits_{-3}^{0} f(s)ds + \int\limits_{0}^{3} f(t)dt = \frac{f(3)+f(-3)}{2}(3-(-3)) = 0$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = 3$ *então* $\int\limits_a^b f(x)dx = f(a)a = 0$ *para qualquer valor de* a

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = 3$ *então* $\int\limits_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) = f(b)(b-a)$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(x) = m$ *então* $\int\limits_0^t f(x)dx \int\limits_0^t mdx = mt$

gabarito:

6. *integral, velocidade, distância*

(2) (V)[ ](F)[ ] *A velocidade dum objeto é* $v(t) = m$ *então a distância percorrida entre os instantes* t_0 *e* t_1 *será* $\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)dt = m(t_1 - t_0)$

(3) (V)[ ](F)[ ] "distância" *é a medida a* quantidade de velocidade *entre dois instantes dados. Se a velocidade for constante igual a* $\underline{m}$ *então*

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)dt = m(t_1 - t_0) \tag{1}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se o movimento for* uniformemente acelerado *então a equação da velocidade é* $v(t) = mt + v_0$ *e a distância percorrida entre dois instantes* t_0 *e* t_1 *será*

movimento é uniformemente acelerado quando a aceleração é constante, o movimento da Terra em volta do Sol não é uniformemente.

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \frac{v(t_0)+v(t_1)}{2}(t_1 - t_0) = m\frac{t_0+t_1}{2}(t_1 - t_0) + v_0(t_1 - t_0) \tag{2}$$

é a soma das áreas de um paralelogramo com um retângulo (triângulos são paralelogramos).

(7) (V)[ ](F)[ ] *No caso dum corpo em queda livre (sem considerar a resistência do ar) considerando* $t_0 = 0$ *a distância percorrida até o instante* t *será*

$$\int\limits_{t_0}^{t} gsds = g\int\limits_0^t sds = \frac{gt^2}{2} \tag{3}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se houver uma velocidade inicial, no caso do corpo em queda livre, então a velocidade será* $v(t) = v_0 + gt$ *em que* g *é a* constante média da gravidade, *e a distância percorrida será*

$$s = \int\limits_0^t v(t)dt = \int\limits_0^t (v_0 + gt)dt = \int\limits_0^t v_0 dt + \int\limits_0^t gtdt \tag{4}$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

gabarito:

7. *Representação geométrica da integral*

Considere os gráficos na figura (fig. 2), página 5,

(2) (V)[ ](F)[ ] *No gráfico (b), se* $\frac{a+b}{2} = 0$ *o gráfico representa uma área nula.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *O gráfico (a) representa a integral de uma parábola,* $\int\limits_b^a f(t)dt$, *em que* f *é uma função do segundo grau, e é formado de duas áreas algébricas negativas e uma área algébrica positiva, porque* $a < b$.

(5) (V)[ ](F)[ ] *A integral* $\int\limits_a^b f$ *no gráfico (d) representa uma área positiva e a integral* $\int\limits_b^a f$ *representa uma área negativa, porque* $a < b$.

(7) (V)[ ](F)[ ] *A integral* $\int\limits_a^b f$ *no gráfico (c) é a soma duas área algébricas negativas e uma área algébrica positiva, porque* $a < b$.

(11) (V)[ ](F)[ ] *No gráfico (b), se* $\frac{a+b}{2} = 0$ *então gráfico representa uma área,*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = 0$$

nula se $f(0)$ *e* f *for uma função impar.*

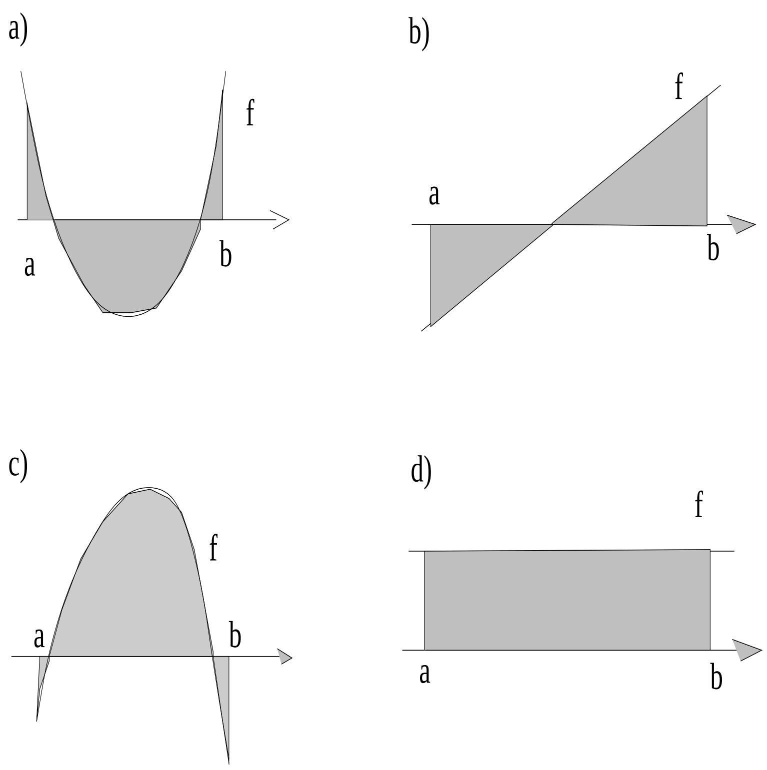

Figura 2: gráficos de integral

gabarito: *1155*

8. *integral e desigualdade*

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ *definida em qualquer intervalo que não contenha o zero.*

(2) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $0 < a < b$ *então*

$$\frac{1}{b} < f(x) < \frac{1}{a} \tag{6}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $0 < a < b$ *então*

$$\frac{1}{a} < f(x) < \frac{1}{b} \tag{7}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $0 < a < b$ *então* $\frac{b-a}{b}, \frac{b-a}{a}$ *são áreas e*

$$\frac{b-a}{b} < \int\limits_a^b f(x)dx < \frac{b-a}{a} \tag{8}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* m, M *forem ínfimo e supremo de* f *em* $[a, b]$ *então*

$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx < M(b-a) \tag{9}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* m, M *forem ínfimo e supremo de* f *em* $[a, b]$ *e se a integral de* f *existir neste intervalo, então*

$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx < M(b-a) \tag{10}$$

gabarito:

9. *Cálculo aproximado da integral*

Se o gráfico de f *for um segmento de reta não paralelo ao eixo* OY *então* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *pode ser calculada usando o método da área do trapésio. Não sendo este caso podemos calcular esta integral, aproximadamente, se ela existir, usando uma soma de Riemann:*

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{N}; \text{ precisão, número de divisões de } [a, b]; \tag{11}$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} f(a + k\Delta x)\Delta x; \tag{12}$$

$$S_N = \Delta x \sum_{k=0}^{N} f(a + k\Delta x); \tag{13}$$

em que na última equação, (eq.13) usei a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição para otimizar a expressão. Estas somas de Riemann se chamam uniformes e formam uma sequência convergindo para o valor

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{14}$$

se a integral existir. Este cálculo pode ser terminado, manualmente, com auxílio duma calculadora ou melhor*, com um programa de computador.*

(2) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^2; \tag{15}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a + k\Delta x)^2 = \Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} a + k^2; \tag{16}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^2; \tag{17}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a + k\Delta x)^2 = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a^2 + 2ak\Delta x + k^2\Delta x^2); \tag{18}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^2; \tag{19}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N} (a + k\Delta x)^2; \tag{20}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x N a^2 + 2a\Delta x^2 \sum_{k=0}^{N-1} k + \Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \tag{21}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^2; \tag{22}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x N a^2 + 2a\Delta x^2 \sum_{k=0}^{N-1} k + \Delta x^3 P(k); \tag{23}$$

em que P é um polinômio que calcula a soma dos cubos duma progressão artimética.

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^2; \Delta x = \tfrac{b-a}{N} \tag{24}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x N a^2 + 2a\Delta x^2 P_1(N) + \Delta x^3 P_2(N); \tag{25}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx a^2(b-a) + \tfrac{2a(b-a)^2}{N^2} P_1(N) + \tfrac{(b-a)^3}{N^3} P_2(N) \tag{26}$$

em que P_1 é um polinômio que calcula a soma dos termos duma p.a. e P_2 é um polinômio que calcula a soma dos quadrados dos termos duma p.a.. P_1, P_2 podem ser encontrados resolvendo dois sistemas de equações lineares.

gabarito:

10. *cálculo aproximado da integral* *O objetivo é o cálculo aproximado integral de $f(x) = x^3$ usando* somas de Riemann.

(2) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^3; \Delta x = \tfrac{b-a}{N}; \tag{27}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\Delta x)\Delta x; \tag{28}$$

$$I \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a + k\Delta x)^3 = N\Delta x^3(a^3 + 3a^2 + 3a + 1); \tag{29}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^3; \Delta x = \tfrac{b-a}{N}; \tag{30}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a + k\Delta x)^3; \tag{31}$$

$$I \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} \left(a^3 + 3a^2 k\Delta x + 3ak^2\Delta x^2 + k^3\Delta x^3\right); \tag{32}$$

$$I \approx N a^3 \Delta x + 3a^2\Delta x^2 \sum_{k=0}^{N-1} k + 3a\Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 + \Delta x^4 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \tag{33}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^3; \Delta x = \tfrac{b-a}{N}; \tag{34}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a + k\Delta x)^3; \tag{35}$$

$$I \approx \Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} a^3 + 3a^2 k\Delta x + 3ak^2\Delta x^2 + k^3\Delta x^3; \tag{36}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^3; \Delta x = \tfrac{b-a}{N}; \tag{37}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (a + k\Delta x)^3; \tag{38}$$

$$I \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} a^3 + 3a^2 k\Delta x + 3ak^2\Delta x^2 + k^3\Delta x^3; \tag{39}$$

$$I \approx N a^3\Delta x + 3a^2\Delta x^2 \sum_{k=0}^{N-1} k + 3a\Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 + \Delta x^4 \sum_{k=0}^{N-1} k^3; \tag{40}$$

$$I \approx a^3(b-a) + 3a^2 \tfrac{(b-a)^2}{N^2} P_1(N) + 3a\tfrac{(b-a)^3}{N^3} P_2(N) + \tfrac{(b-a)^4}{N^4} P_3(N); \tag{41}$$

em que $P_1(N)$ é a soma da p.a. de termo geral k, $P_2(N)$ é a soma dos quadrados da p.a. de termo geral k e $P_3(N)$ é a soma dos cubos da p.a. de termo geral k.

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

- $P_1(N) = \frac{(N-1)N}{2}$ *é a soma da p.a. de termo geral k.*
- $P_2(N) = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}$ *é a soma dos quadrados dos termos da p.a. k. $P_2(N)$ é um polinômio do terceiro grau portanto o teste com os valores $P_2(1), P_2(2), P_2(3), P_2(4)$ aplicados às correspondentes somas tiradas de*

  $$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

  provam que a fórmula está correta.
- $P_3(N) = (0 + 2 + \cdots + N - 1)^2 = \frac{((N-1)^2 N^2)}{4}$, *é a soma dos cubos dos termos da p.a. k. $P_3(N)$ é um polinômio do quarto grau portanto o teste com os valores $P_3(1), P_3(2), P_3(3), P_3(4), P_3(5)$ aplicados às correspondentes somas tiradas de*

  $$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$$

  provam que a fórmula está correta.

Quem garante que é suficiente a quantidade de testes mencionados é o teorema fundamental da Álgebra *que afirma* "um polinômio do grau n tem extamente $n+1$ raizes", *ou, equivalentemente, que* "uma equação polinomial do grau n tem extamente $n+1$ raizes". *Porém, as fórmulas precisam ser as corretas!*

gabarito:

Índice Remissivo

Álgebra
teorema fundamental, 8

cubos
soma dos, 7, 8

distância, 3, 4

figura
função e integral, 1
gráfico e integral, 5

integral, 3, 4
cálculo aproximado, 6, 7
desigualdade, 5
representação geométrica, 4

medida, 3

quadrados
soma dos, 8

Riemann
soma de, 6, 7

soma
termos duma p.a., 7
soma de Riemann, 6, 7
soma dos quadrados, 7

velocidade, 3

Referências Bibliográficas

[1] Richard Courant. Gauss and the present situation of the exact sciences. In *The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.

[2] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.