Cálculo 1	**Lista numero 1**
integral	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**

alun@:

4 de setembro de 2017	**UeVA**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta *gabarito* você encontra o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. Entretanto é possivel que *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 1 *integral*
objetivo: *frações racionais, funções trigonométricas*
palavras chave: *integral, função racional, função trigonométrica.*

1. *equação diferencial, primitiva, integral* *Esta questão introduz o conceito* primitiva *caracterizando-o como a operação inversa da derivada, quer dizer:*

$$F(x) = \int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Usualmente a expressão, a integral*, na equação (eq.1), é referida como* integral indefinida *porque, se você* descobrir *uma solução F para a* equação diferencial *expressa na equação (eq.1), em que f é dada, então $F + C$ é também uma solução.*

Considere a função $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} = cossec^2(x)$.

(2) (V)[ ](F)[ ]

$$f(x) = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + u\frac{du}{u^2} = 1 + \frac{du}{u}; u = \cos(x) \tag{2}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] Se $u = \sin(x)$ então

$$u' = \cos(x);\ u'' = -\sin(x) = -u;\ u'^2 + u''^2 = 1; \tag{3}$$

$$f(x) = 1 + u'\tfrac{u'}{u^2}; \tag{4}$$

(5) (V)[ ](F)[ ]

$$u' = \cos(x); u'' = -\sin(x) = -u; u'^2 + u''^2 = 1; \tag{5}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \tfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}dx = \int(1 + \tfrac{u'}{u^2})du; \tag{6}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ]*

$$u' = \cos(x); u'' = -\sin(x) = -u; u'^2 + u''^2 = 1; \tag{7}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}dx = \int (1 + \frac{u''}{u^2})du; \tag{8}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

$$u' = \cos(x); u'' = -\sin(x) = -u; u'^2 + u''^2 = 1; \tag{9}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}dx = \int (1 + \frac{u'}{u^2})du; \tag{10}$$

$$F(x) = u - u'\frac{1}{u} + \int \frac{u''}{u}du = u - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \int du; \tag{11}$$

$$F(x) = u - \frac{1}{\tan(x)} - u = -\frac{1}{\tan(x)}; \tag{12}$$

$$F'(x) = -(\frac{\cos(x)}{\sin(x)})' = -\frac{-1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} = f(x); \tag{13}$$

gabarito: 165

2. *função complexa Considere a função complexa*

$$f(x) = e^x(\cos(x) + i\sin(x)) = e^x e^{ix}; \tag{14}$$

em que e^{ix} é dada pela fórmula de Euler.

Nome pomposo para o círculo trignométrico!

----

(2) *(V)[ ](F)[ ] A função complexa $z = f(x)$ nada tem a ver com a função vetorial*

$$v(x) = e^x (\cos(x), \sin(x)); \tag{15}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ] A* parte real *da função complexa $z = f(x)$, (notação $re(f(x))$), é a primeira coordenada da função vetorial*

$$v(x) = (e^x(\cos(x), \sin(x))) = (re(f(x)), im(f(x))); \tag{16}$$

e sua parte imaginária, (notação $im(f(x))$), é segunda coordenada da função vetorial v.

(5) *(V)[ ](F)[ ] A função complexa f é integrável e derivável sobre qualquer intervalo $[a, b]$ da reta, e o mesmo vale para a função vetorial v, definida na equação (eq.15). O resultado difere apenas na forma, no caso de f, tem-se outra função complexa, no caso de v resulta noutra função vetorial, V ou v', os resultados são idênticos diferindo apenas na forma.*

(7) *(V)[ ](F)[ ] Seja $g = re(f))$, a parte real de f:*

$$g(t) = e^t \cos(t); \tag{17}$$

Então

$$\int_a^x g(t)dt = \int_a^x e^t \cos(t)dt = e^t \cos(t)\|_a^x; \tag{18}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Seja* $g = re(f))$, *a parte real de* f:

$$g(t) = e^t \cos(t); \tag{19}$$

Então

$$\int_a^x g(t)dt = \frac{e^t(\cos(t) + \sin(t))}{2} \|_a^x; \tag{20}$$

gabarito: 165

3. *funções polinomiais*

Nesta questão estou usando a derivada complexa *duma função complexa e há muita coisa para dizer a respeito mas em suma você precisa saber que as funções complexas funcionam exatamente como as funções reais, por exemplo,*

$$f(z) = 4 + i + (2+3i)z - iz^2 + (5-3i)z^3 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 \tag{21}$$

$$f'(z) = (2+3i) - 2iz + 3(5-3i)z^2 = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2; \tag{22}$$

$$F(z) = (4+i)z + \tfrac{2+3i}{2}z^2 - \tfrac{i}{3}z^3 + \tfrac{5-3i}{4}z^4 = c_0 z + \tfrac{c_1}{2}z^2 + \tfrac{c_2}{3}z^3 + \tfrac{c_3}{4}z^4; \tag{23}$$

se aplicam as mesma regras para derivação como também para integração.

E há propriedades que as funções complexas têm que as funções reais não tem, porém estas não estão sendo usadas nesta lista. O Cálculo Diferencial com as funções complexas é muito mais rico e envolvente.

Não se deixe intimidar!

----

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(z) = z^2$ *então*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y); \tag{24}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2; \\ v(x,y) = 2ixy; \end{cases} \tag{25}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(z) = z^2$ *então*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y); \tag{26}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2; \\ v(x,y) = 2xy; \end{cases} \tag{27}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se* $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ *então*

$$f'(z) = 2z; f'(z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$f'(z) = 2x + 2iy = 2z = \tfrac{\partial u}{\partial x} + i\tfrac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{\partial v}{\partial y} - i\tfrac{\partial u}{\partial y} \tag{29}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se*

$$z = x + iy; x, y \in \mathbf{R}; \tag{30}$$

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi; \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

então uma primitiva de f é dada por

$$F(z) = \frac{x^3}{3} + ix^2y - xy^2 - \frac{iy^3}{3}; \tag{33}$$
$$F(z) = \frac{z^3}{3}; \tag{34}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ] Se $f(z) = z^4$ então uma sua primitiva será F tal que*

$$F(z) = \frac{x^5}{5} + ix^4y - 2x^3y^2 - 2ix^2y^3 + xy^4 + \frac{iy^5}{5} = \frac{z^5}{5} = \tag{35}$$
$$\frac{x^5+5ix^4y-10x^3y^2-10ix^2y^3+5xy^4+iy^5}{5}; \tag{36}$$

em que $z = x + iy$

gabarito: 1155

4. fraçõ*es parciais* *Um dos objetivos é a decomposição da função $f(z) = \frac{z^4+1}{z(z-1)^2}$ numa soma de frações em que os numeradores tenham grau menor do que* o grau do denominador *mais um polinômio que representa* o resto da divisão. *O outro objetivo é aplicar esta técnica no cálculo de integrais de funções racionais.*

----

(2) *(V)[ ](F)[ ] O resto na divisão de $z^4 + 1$ por $z^3 - 2z^2 + z$ é $3z^2 - 2z + 1$.*

(3) *(V)[ ](F)[ ] f, g na expressão abaixo*

$$f(z) = \frac{z^4+1}{z(z-1)^2} = z + 2 + \frac{-3z^2 - 2z + 1}{z(z-1)^2} = g(z); \tag{37}$$

representam a mesma função.

(5) *(V)[ ](F)[ ] f, g na expressão abaixo*

$$f(z) = \frac{z^4+1}{z(z-1)^2} = z + 2 + \frac{3z^2 - 2z + 1}{z(z-1)^2} = g(z); \tag{38}$$

representam a mesma função.

(7) *(V)[ ](F)[ ] Se $f(z) = \frac{z^4+1}{z(z-1)^2}$ então existem números A, B, C tais que*

$$f(z) = z + 2 + \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z} \tag{39}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ] Se $f(z) = \frac{z^4+1}{z(z-1)^2}$ então existem números B, C tais que*

$$f(z) = z + 2 + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z} \tag{40}$$

gabarito: 70

5. *integral* *Seja $f(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2}$.*

(2) *(V)[ ](F)[ ] O resto na divisão do polinômio $2z$ pelo polinômio $(z^2+1)^2$ é o polinômio identicamente nulo.*

(3) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(z) = \frac{2z}{(z-i)^2(z+i)^2}; \tag{41}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(z) = \tfrac{2z}{z^4+2z^2+1}; \tag{42}$$

$$(z^2+1)^2 = z^4+2z^2+1; \tag{43}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(z) = \frac{A}{(z-i)^2} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{(z+i)^2} + \frac{D}{z+i}; \tag{44}$$

com $(A, B, C, D) = (-\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2}, 0)$

(11) *(V)[ ](F)[ ] Uma primitiva de*

$$f(z) = \frac{2z}{z^4+2z^2+1} \tag{45}$$

é

$$F(z) = -\frac{1}{(z^2+1)} + 1; \tag{46}$$

gabarito: 1155

6. *função trigonométrica, integral*

(2) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx; \tag{47}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x); \tag{48}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\int (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = 0; \tag{49}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\int (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = x + K; \tag{50}$$

em que K é uma constante qualquer.

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x\sin(x)\cos(x)}{2} \tag{51}$$

gabarito: 14

7. *função trigonométrica, integral*

Considere uma primitiva da função

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)+1}; \tag{52}$$

$$F(x) = \int \frac{1}{\cos(x)+1} = \int f(x)dx; \tag{53}$$

Se $u = \tan(x/2)$ *então as seguintes transformações podem ser consideradas e usadas, em que* dx, du *são novas variáveis que ainda assim satisfazem à* fração de Leibniz $\frac{du}{dx}$ *quando* u *for função de* x *ou vice versa,* $\frac{dx}{du}$ *quando* x *for função de* u.

A fração de Leibniz *é responsável pela tentativa de se manter viva a noção de* infinitesimal *que é inteiramente desnecessária e representou uma incrível dificuldade na apresentação do Cálculo quando há formas mais eficientes de se fazer uso da transformação contida no símbolo de Leibniz simplesmente considerando estas duas novas variáveis* $dx, du\ldots$

$$du = \frac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \frac{\left(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)\right)dx}{2\cos^2(x/2)}; \tag{54}$$

$$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x/2)\right)dx; \tag{55}$$

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}; \tag{56}$$

Verifique quais são as opções verdadeiras.

(2) (V)[ ](F)[ ] *Aplicando-se a* mudança de variável $u = \tan(x/2)$ *e fazendo uso das transformações descritas nas equações (eq.54)- (eq.56), se obtém*

$$\tan(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)} = \frac{2u}{1-u^2}; \tag{57}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}; \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}; \tag{58}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Aplicando-se a* mudança de variável $u = \tan(x/2)$ *e levando-se em conta as transformações descritas nas equações (eq.54)- (eq.56), se obtém*

$$F(x) = \int \frac{dx}{\cos(x)+1} = \int \frac{2du}{1+u^2}\frac{1+u^2}{2} = \int du = u + K; u = \tan(x/2); \tag{59}$$

em que K *é uma constante arbitrária.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Aplicando-se a* mudança de variável $u = \tan(x/2)$ *e fazendo uso das transformações descritas nas equações (eq.54)- (eq.56), se obtém*

$$F(x) = \int \frac{dx}{\cos(x)+1} = \tan(x/2) + K \tag{60}$$

em que K *é uma constante arbitrária.*

(7) (V)[ ](F)[ ]

$$F(x) = \int \frac{dx}{\cos(x)+1} + K \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{1}{\cos(x)+1} \tag{61}$$

em que K *é uma constante arbitrária.*

(11) (V)[ ](F)[ ]

$$F(x) = \int \frac{dx}{\cos(x)+1} = \tan(x/2); \tag{62}$$
$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\tan(x/2)) = \frac{1}{2\cos^2(x/2)}; \tag{63}$$
$$F'(x) = \frac{1}{2(1-\sin^2(x/2))} = \frac{1}{1+\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)-2\sin^2(x/2)}; \tag{64}$$
$$F'(x) = \frac{1}{\cos(x)+1} = f(x); \tag{65}$$

gabarito: *2310*

8. *funções trigonométricas*

Primitivas das funções $f(x) = \cos^2(x), g(x) = \sin^2(x)$

(2) (V)[ ](F)[ ]

$$\int (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = H(x) = x + K; K \in \mathbf{C}; \tag{66}$$

K é uma constante arbitrária.

(3) (V)[ ](F)[ ]

$$\int \cos^2(x) - \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + K; K \in \mathbf{C}; \tag{67}$$

K é uma constante arbitrária.

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se*

$$F(x) = \int \cos^2(x)dx = \frac{x + \cos(x)\sin(x)}{2}; \tag{68}$$

então $F'(x) = \cos^2(x)$.

(7) (V)[ ](F)[ ]

$$G(x) = \int \sin^2(x)dx = \frac{x+\frac{1}{2}\sin(2x)}{2} + K; K \in \mathbf{C}; \tag{69}$$
$$G(x) = \frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2} + K; K \in \mathbf{C}; \tag{70}$$

K é uma constante arbitrária.

(11) (V)[ ](F)[ ]

$$G(x) = \int \sin^2(x)dx = \frac{x-\frac{1}{2}\sin(2x)}{2} + K; K \in \mathbf{C}; \tag{71}$$
$$G(x) = \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2} + K; K \in \mathbf{C}; \tag{72}$$

K é uma constante arbitrária.

gabarito: *330*

9. *funções trigonométricas*

No cálculo duma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ *considere a* mudança de variável

$$t = \tan(x/2); dt = \tfrac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \tfrac{(\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2))dx}{2\cos^2(x/2)}; \tag{73}$$

$$dt = \tfrac{1}{2}(1+\tan^2(x/2))dx = \tfrac{1+t^2}{2}dx \quad \Rightarrow \quad dx = \tfrac{2dt}{1+t^2}; \tag{74}$$

$$\tan(x/2) = t \quad \Rightarrow \quad \tan(x) = \tfrac{2t}{1-t^2}; \tag{75}$$

$$t \in (-1,1) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{2t}{1+t^2}, \tfrac{1-t^2}{1+t^2} \in [-1,1]; \tag{76}$$

$$t = \tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \tfrac{2t}{1+t^2};\ \cos(\alpha) = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}; \tag{77}$$

em que dt, dx *são duas novas variáveis que satisfazem à notação chamada* fração de Leibniz.

(2) *(V)[ ](F)[ ] Considere a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações descritas nas equações (eq. 73)- (eq. 76). Os gráficos das funções*

$$\begin{cases} t \mapsto 1+t^2; \\ t \mapsto 2t; \end{cases} \tag{78}$$

sendo tangentes no ponto $(1,2)$ *garante que* $\frac{2t}{1+t^2}$ *represente* $\sin(\alpha)$ *com* $\alpha = atan(t)$;

(3) *(V)[ ](F)[ ] Considere a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações descritas nas equações (eq. 73)- (eq. 76). Os gráficos das funções*

$$\begin{cases} t \mapsto 1-t^2; \\ t \mapsto 2t; \end{cases} \tag{79}$$

sendo tangentes no ponto $(-1,-2)$ *garante que* $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ *represente* $\cos(\alpha)$ *com* $\alpha = atan(t)$;

(5) *(V)[ ](F)[ ] Considere a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações descritas nas equações (eq. 73)- (eq. 76).*

Então se $\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$ *podemos deduzir que* $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$ *e* $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

(7) *(V)[ ](F)[ ] Considere a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações descritas nas equações (eq. 73)- (eq. 76).*

$$F(x) = \int \tfrac{dx}{\sin(x)} = \int \tfrac{1+t^2}{2t}\tfrac{2dt}{1+t^2} = \int \tfrac{dt}{t} = \ln(t) + K; t = \tan(x/2); \tag{80}$$

$$F(x) = \ln(\tan(x/2)) + K; \tag{81}$$

em que K *é uma constante arbitrária.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] Considere a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações descritas nas equações (eq. 73)- (eq. 76).*

$$F(x) = \ln(\tan(x/2)); \tag{82}$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \tag{83}$$

gabarito: 2310

10. *funções trigonométricas*

Considere a mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *em função da qual é possível fazer as transformações*

$$t = \tan(x/2); dt = \frac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \frac{(\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2))dx}{2\cos^2(x/2)} = \tag{84}$$

$$dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x/2))dx = \frac{1+t^2}{2}dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \tag{85}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(x) = \frac{2\cos(x/2)\sin(x/2)}{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1-t^2}; \\ (\frac{2t}{1+t^2})^2 + (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}; \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \end{array} \right. ; \tag{86}$$

(2) *(V)[ ](F)[ ] Considerando a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações desenvolvidas nas equações (eq.84)- (eq.86) , se tem que:*

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2}; \tag{87}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t) + B(1-t)}{1-t^2}; \tag{88}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2} \tag{89}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]Considerando a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações desenvolvidas nas equações (eq.87)- (eq.89) ,*

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = G(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\ln(1 - \tan^2(x/2)) + K; t = \tan(x/2); \tag{90}$$

em que K *é uma constante arbitrária.*

(7) *(V)[ ](F)[ ]Considerando a* mudança de variável $t = \tan(x/2)$ *e as transformações desenvolvidas nas equações (eq.87)- (eq.89) ,*

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t}; t = \tan(x/2); \tag{91}$$

$$G(x) = \ln(1 - \tan^2(x/2)) + k; \tag{92}$$

em que K *é uma constante arbitrária.*

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

$$G(x) = \ln(1 - \tan^2(x/2)) + k; \tag{93}$$

$$G'(x) = \frac{1}{\cos^2(x/2)(1-\tan^2(x/2))} = \frac{1}{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} = \frac{1}{\cos(x)}; \tag{94}$$

gabarito: 462

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.