



**Cálculo I**  
**Indução finita**  
 prof. T. Praciano-Pereira

**Lista zero-c**, 11 de agosto de 2010  
 tarcsio.praciano@gmail.com  
 Dep. de Computação UeVA

**alun@:**

www.calculo.sobralmatematica.org

Documento produzido com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 16, segunda-feira.

### 0.0.1 Revisão

**Palavras chave** Somas, progressões, indução finita  
<http://ecalculo.if.usp.br/ferramentas/pif/pif.htm>

## 0.1 Exercícios

### 1. Indução finita

- (a)  $(V)[ ](F)[ ]$  A soma dos  $n$  primeiros números naturais é  $\frac{n+1}{2}n$
- (b)  $(V)[ ](F)[ ]$  A soma dos  $n$  primeiros números naturais é  $\frac{n+1}{2}n$
- (c)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (d)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (e)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- (f)  $(V)[ ](F)[ ]$   $\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$

### 2. Indução finita

- (a)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + 8 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- (b)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + 8 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- (c)  $(V)[ ](F)[ ]$   $n > 1; n^3 < n!$
- (d)  $(V)[ ](F)[ ]$   $n \geq 6; n^3 < n!$
- (e)  $(V)[ ](F)[ ]$   $n \geq 4; n^2 < n!$

### 3. Indução finita

- (a)  $(V)[ ](F)[ ]$  A soma dos  $n$  primeiros números ímpares é  $n^2$
- (b)  $(V)[ ](F)[ ]$  A soma dos  $n$  primeiros números pares é  $n^2 + n$
- (c)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + r + r^2 + \dots + r^n = r^{n+1} - 1$
- (d)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$  para todo  $0 < r; r \neq 1$
- (e)  $(V)[ ](F)[ ]$   $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

### 4. Somas

Verificamos nas questões anteriores que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad (1)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad (2)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad (3)$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \quad (4)$$

O que sugere<sup>1</sup> que a soma de uma “progressão de grau  $n$ ” é obtida com um polinômio de grau  $n+1$  e esta questão vai conduzi-l@ à esta demonstração. Para começar, escreva as potências de 11 uma abaixo da outra começando com a potência zero até a quarta potência.

- (a)  $(V)[ ](F)[ ]$  Se  $P$  for um polinômio de grau  $n$  então  $P(x+1) - P(x)$  será um polinômio de grau  $n+1$  e vale a recíproca, um polinômio do grau  $n+1$  é a dado pela diferença  $P(x+1) - P(x)$  de um polinômio de grau  $n$ .
- (b)  $(V)[ ](F)[ ]$  Se  $P$  for um polinômio de grau  $n$  então  $P(x+1) - P(x)$  será um polinômio de grau  $n-1$  e vale a recíproca, um polinômio do grau  $n-1$  é a dado pela diferença  $P(x+1) - P(x)$  de um polinômio de grau  $n$ .
- (c)  $(V)[ ](F)[ ]$  Se  $Q(x) = x^4$  então  $\sum_{k=0}^n Q(k) = P(n+1) - P(0)$  e  $P$  é um polinômio de grau 3. Encontre o polinômio.
- (d)  $(V)[ ](F)[ ]$  Se  $Q(x) = x^4$  então  $\sum_{k=0}^n Q(k) = P(n+1) - P(0)$  e  $P$  é um polinômio de grau 5. Encontre o polinômio.
- (e)  $(V)[ ](F)[ ]$  Se  $Q(x) = x^5$  então  $\sum_{k=0}^n Q(k) = P(n+1) - P(0)$  e  $P$  é um polinômio de grau 6. Encontre o polinômio.

<sup>1</sup>experimentos sugerem teoremas... mas eles precisam ser provados!