Cálculo I	**Lista zero - solução**
números racionais	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
25 de dezembro de 2014	produzido com LaTeX - Debian/Gnu/Linux
página	**http://www.calculo.sobralmatematica.org/**

Gabarito das lista zero

1. **Gabarito das questões de múltipla escolha**

   Na primeira coluna o número da questão, seguido da lista de itens "verdadeiros".

1)	b, c
2)	b, c, d, e
3)	a, b, d, e
4)	a, d, e
5)	b, c, e
6)	e

2. **O item discursivo: O conjunto Q**

   A história é uma arte muito difícil e um exemplo disto é o *triângulo de Pascal*, denominado em homenagem a Blaise Pascal que viveu no século 16, mas, aparentemente, os matemáticos chineses já conheciam este algoritmo dois mil anos antes de Pascal. Também parece que a geometria, dita dos gregos, era conhecida por outros povos anteriores aos helenos que, apenas teriam compilado de forma organizada aquilo que chegou até nós como *geometria euclidiana*.

   Isto para afirmar, sem me sentir obrigado a grandes justificativas que, num certo momento da história humana, provavelmente na Idade Média, se começou a conceber que objetos como $\frac{1}{3}$ *seriam números*. O uso do condicional tem sentido porque até recentemente as escolas ensinavam que $\frac{5}{3}$ seria uma *fração imprópria* sugerindo que não seria bem uma fração! Os números negativos ainda hoje são tratados *negativamente* e os números complexos nem sempre fazem parte do currículo do Ensino Médio ... para não mencionar os *quarternions* que, possivelmente, há gente que nem sabe que existem.

   Então fazendo uma história romanceada, digamos que inventamos os objetos do tipo $\frac{1}{n}$ quando $n \in \mathbf{N}; n \neq 0$ para representar os inversos multiplicativos dos número naturais, com exceção do zero, e aos poucos construimos uma aritmética com estes novos objetos com as seguintes regras:

(a) O símbolos $\frac{p}{q}$ representam números sempre que $q \neq 0$ em que os membros $p, q \in \mathbf{N}$. Temos o hábito de designar p como numerador e q como denominador. A razão destes nomes vem da ideia intuitiva da invenção das frações em que $\frac{2}{3}$ sifnificaria a quantidade 2 de uma coisa chamada "terço" donde o 2 é o "numerador" enquanto que 3 dá o nome, "denominador".

(b) O inverso aditivo do número $\frac{p}{q}$ é o número $\frac{-p}{q}$ que também pode ser escrito como $-\frac{p}{q}$ e então entendemos que o sinal $-$ é um modificador de tal modo que $a + (-a) = 0$.

(c) Vale regra $-(-a) = a$;

(d) <u>O zero</u> Sempre que $q \neq 0$, $\frac{0}{q} = 0 \in \mathbf{N}$ e aqui guarde como observação para uso posterior, então existe uma quantidade imensa de representantes do zero e isto é um problema que preciso resolver!

(e) Sempre podemos reduzir uma fração à sua expressão mais simples eliminando fatores comuns ao *numerador* e ao *denominador*. Assim

$$\frac{8}{80} = \frac{2^3}{2^4 5} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10} \tag{1}$$

ou seja, fatoramos numerador e denominador e eliminamos os fatores comuns para obter a forma irredutível duma fração. Esta operação cria um problema de que vou tratar ao final criticando todo o processo. Agora temos pelos menos dois objetos representando a mesma coisa, a fração simplificada e anterior que pode ser simplificada:

$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

(f) Esta regra de simplificação pode ser usada ao reverso para permitir a definição da soma de frações. Se quisermos somar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

vamos acrescentar fatores comuns até obter denominadores iguais:

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{q}{qp} + \tfrac{p}{pq} \tag{2}$$

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{q}{pq} + \tfrac{p}{pq} = \tfrac{1}{pq}(q + p) \tag{3}$$

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{q+p}{pq} \tag{4}$$

porque temos q objetos do tipo $\frac{1}{pq}$ e p objetos do tipo $\frac{1}{pq}$. Estou usando, a comutatividade da multiplicação de números naturais, na lista de operações acima junto a regra que nos permite eliminar ou incluir fatores comuns e finalmente, silenciosamene, estou usando *distributividade* da mulplicação em relação a adição que vou incluir como a próxima regra.

(g) Vale a distributividade da multiplicação relativamente à soma.

(h) Podemos agora deduzir da regra anterior uma regra geral para soma de frações

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm}{nq} + \frac{np}{nq} \tag{5}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm+np}{nq} \tag{6}$$

sendo a regra:

- multiplicamos os denominadores para formar o novo denominador;
- multiplicamos em cruz, os numeradores e denominadores e os somamos para formar o novo numerador.
- o resultado nem sempre será uma fração na forma mais simples, e este um problema de que tenho que tratar em seguida.

A figura (1) página 3, apresenta um algoritmo gráfico para ilustrar a

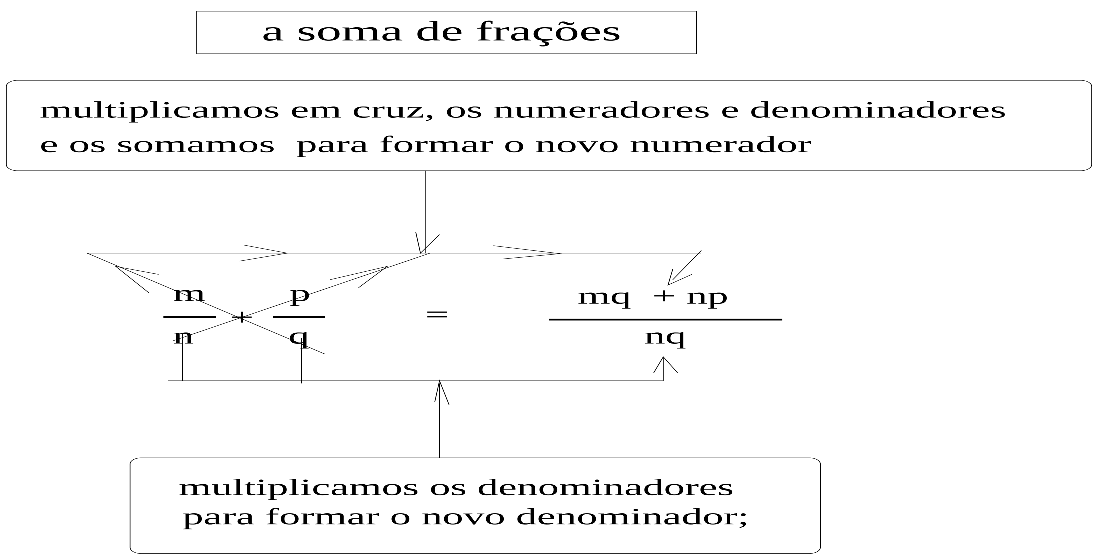

Figura 1: gráfico mostrando a soma de frações

regra de soma de frações.

O principal objetivo era conseguir que toda fração tivesse um inverso multiplicativo:

$$n \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{n}{m}\frac{m}{n} = \frac{mn}{mn} = 1 \tag{7}$$

não sendo necessário indicar que $m \neq 0$ porque já excluimos a possibilidade de haver frações com denominador nulo.

Resumindo, vale para este novo conjunto de objetos todas as propriedades que estão listadas na questão **??** valendo também a propriedade M - 2 do inverso multiplicativo para todas as frações diferentes de zero.

Relação de equivalência

As relações de equivalência resolvem problemas formais de unicidade e outros problemas de identificação como é o caso de polígonos semelhantes que a geometria precisa de identificar. São objetos diferentes mas eles precisam ser "equivalentes". A relação de equivalência é uma generalização da igualdade.

No caso das frações temos uma infinidade de frações que representam o mes número, $\frac{n}{n} \equiv 1; n \neq zero$, por exemplo. Isto cria problemas para a Álgebra que precisa que o inverso dum número seja único, então como no caso dos triângulos semelhantes, precisamos de identificar as frações que representarem o mesmo número coloncando-as todas numa mesma *classe de equivalência*. Mas duas frações iguais forma o que chamamos de *proporção* então o *o produto dos meios é igual ao produto dos extremos* e assim chegamos à regra de equivalência de frações:

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{p}{q} \iff nq = mp \tag{8}$$

é interessante observar que todas as frações equivalentes ficam sobre uma mesma reta do plano de Gauss, determinada pela representação mais simples, pela fração irredutível, a figura (2) página 4, mostra as classes de equivalência das

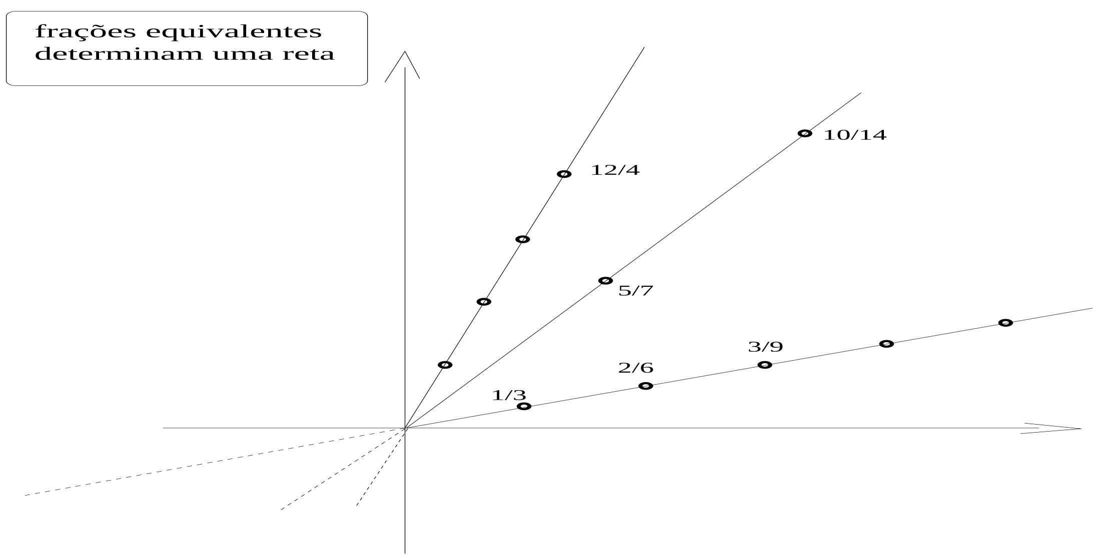

Figura 2: classes de equivalência das frações são retas

frações como pontos das retas contidas no *plano de Gauss*, o produto cartesiano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Representação geométrica de Q

Os números racionais tem uma propridade de "densidade" que os inteiros não têm:

1. entre dois números racionais, sempre tem outro número racional;
2. dados dois número racionais, sempre tem outro à esquerda;
3. dados dois número racionais, sempre tem outro à direita;

A figura (3), página 5, compara com o que acontece na reta a propriedade de den-

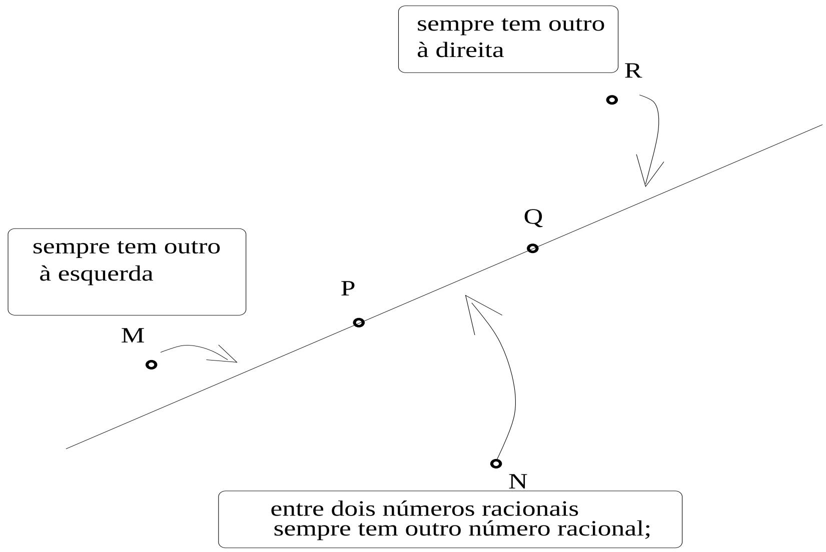

Figura 3: entre dois pontos, na reta ...

sidade dos números racionais. Esta comparação sugere fazer uma interpretação geométrica dos números racionais.

1. Selecionamos um ponto na reta para a dividirmos em duas semiretas: a semireta positiva e a semireta negativa. É o representante do zero.

2. Depois, com um compasso selecionamos os inteiros à distâncias iguais, os inteiro positivos na semireta positiva, e os inteiros negativos na semireta negativa.

3. O espaço que sobra é para as frações que não são inteiros.

4. Depois veremos que que na reta ainda tem números que não são racionais, os números irracionais, que também encontram lugar na reta.

Aqui, novamente, estamos ante uma multitude de exemplares de retas representando **Q** e simplesmente diremos que todas estas são equivalentes como representação de **Q**, e isto vai nos permitir a definição geométrica das operações aritméticas de **Q**. Por exemplo, a figura (4) página 6, ilustra o produto 1.5×2 usando semelhança de triângulos. Escolhi duas retas para representar **Q** e encontrei o resultado da multiplicação em uma das retas.

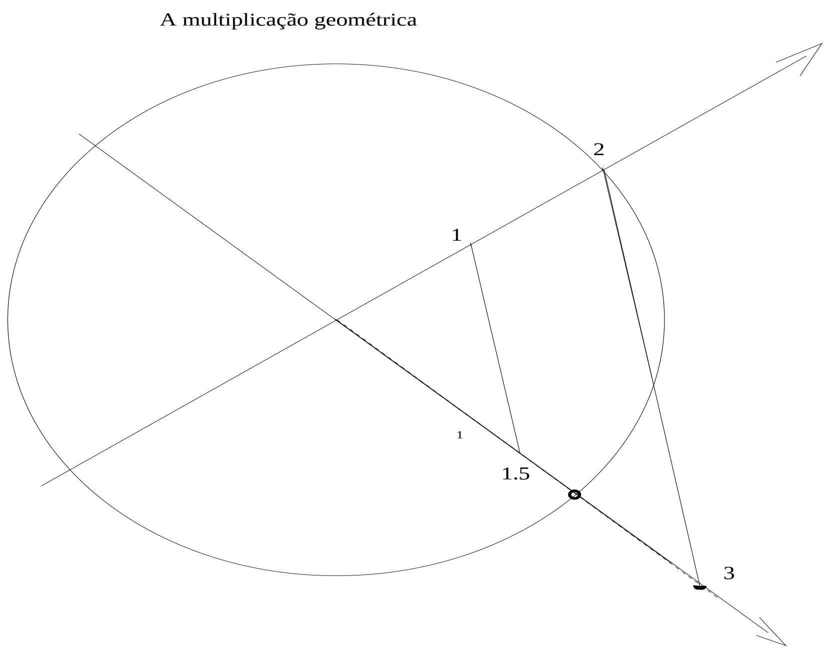

Figura 4: A multiplicação geométrica