



Cálculo I
 Integração geométrica
 prof. T. Práciano-Pereira
 Lista número 02, 23 de agosto de 2010
 tarcisio.praciano@gmail.com
 Dep. de Computação UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org
 Documento produzido com L^AT_EX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 30 de Agosto, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Entender e calcular integrais de funções polinômiais.

Palavras chave cálculo aproximado da integral, funções definidas com a integral, integral de funções polinômiais, integral definida, integral indefinida.

Indução finita

Algumas fórmulas que podem ser provadas com indução finita.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n+1}{2}n \quad (1)$$

$$1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n+1}{2}n\right)^2 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4} \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} \quad (6)$$

Vou precisar destas fórmulas no cálculo de integrais de funções polinômiais.

0.1 Exercícios

1. Problema do corpo em queda livre Faça os gráficos que for possível para auxiliá-l@ no entendimento das questões, g é a aceleração da gravidade que vou supor constante (falso!) é um número negativo.

(a) $(V)[](F)[]$ Se $v(t) = g(t - c) + s_0$; $s_0 > 0$ é a equação da velocidade de um corpo em queda livre, solto de uma altura s_0 que vai encontrar o solo (violentamente) no ponto $x = c - \frac{s_0}{g}$

(b) $(V)[](F)[]$ Se $v(t) = g(t - c) + v_0$; $v(c) = v_0 > 0$; $g < 0$ é a equação da velocidade de um corpo em queda livre, lançado de uma plataforma, à uma certa altura, com a velocidade inicial v_0 que vai encontrar o solo (violentamente) quando $t = c - \frac{v_0}{g}$. O gráfico de tempo contra velocidade é o que se encontra na figura (1) página 2,

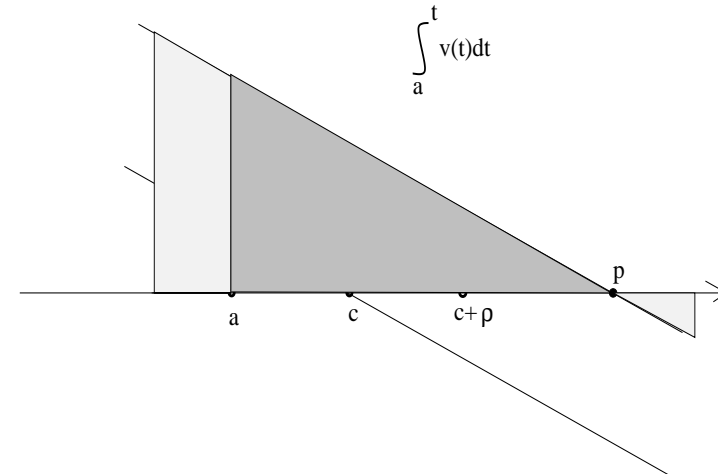


Figura 1: Corpo em queda livre com velocidade inicial

(c) $(V)[](s)[]$ Se $v(t) = g(t - c) + v_0$; $v(c) = v_0 > 0$; $g < 0$

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt; \text{ condição inicial } a;$$

é uma função do segundo grau que descreve o lançamento de um corpo para o alto, de uma plataforma de lançamento, no instante $t = a$. Valem as equações

$$s_a(a) = 0 \quad (7)$$

$$a < c; \rho = c - a; \Rightarrow \{t \in [c - \rho, c + \rho] \Rightarrow s_a(t) \geq 0\}; \quad (8)$$

$$a < c; \rho = c - a \Rightarrow \{t \notin [c - \rho, c + \rho] \Rightarrow s_a(t) < 0\}; \quad (9)$$

No ponto $t = p$, ver o gráfico 1, o corpo encontra o solo violentamente. As informações desta questão lhe permitem fazer o gráfico e encontrar a equação $y = V(t) = s_a(t)$.

(d) $(V)[](s)[]$ Se $v(t) = g(t - c) + v_0$; $v(c) = v_0 > 0$; $g < 0$

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt; \text{ condição inicial } a;$$

é uma função do segundo grau que descreve o lançamento de um corpo para o alto, de uma plataforma de lançamento, no instante $t = a$. Valem as equações

$$s_a(a) = 0 \quad (10)$$

$$a < c; \rho = c - a; \Rightarrow \{t \in [c - \rho, c + \rho] \Rightarrow s_a(t) \geq 0\}; \quad (11)$$

$$a < c; \rho = c - a \Rightarrow \{t > c + \rho\} \Rightarrow s_a(t) < 0\}; \quad (12)$$

Em ponto *posterior* ao ao ponto $t = p$, ver o gráfico 1, o corpo encontra o solo violentamente. As informações desta questão lhe permitem fazer o gráfico e encontrar a equação $y = V(t) = s_a(t)$.

(e) $(V)[\](s)[\]$ Se $v(t) = g(t - c); +v_0; v(c) = v_0 > 0; g < 0$

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt; \text{ condição inicial } a;$$

é uma função do segundo grau que descreve o lançamento de um corpo para o alto, de uma plataforma de lançamento, no instante $t = a$ e valem as equações

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt = \int_a^t g(t - c)dt; \quad (13)$$

$$s_a(t) = \frac{v(a)+v(t)}{2}(t - a) = \frac{g(a-c)+v_0+g(t-c)+v_0}{2}(t - a); \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}ga^2 - gct + v_0tga - v_0a; \quad (15)$$

$$s_a(t) = \frac{1}{2}gt^2v_1t + s_0; \quad (16)$$

$$\begin{cases} v_1 = v_0 - gc; \\ s_0 = gca - v_0a; \end{cases} \quad (17)$$

2. Integral de funções polinomiais Escreva a soma de Riemann correspondente e verifique se o *limite* está correto.

$$(a) \ (V)[\](F)[\] \int_0^a x dx = F(a) = \frac{a^2}{2};$$

$$(b) \ (V)[\](F)[\] \int_0^a x^2 dx = F(a) = \frac{a^4}{4};$$

$$(c) \ (V)[\](F)[\] \int_0^a x^2 dx = F(a) = \frac{a^3}{3};$$

$$(d) \ (V)[\](F)[\] \int_0^a x^3 dx = F(a) = \frac{a^5}{6};$$

$$(e) \ (V)[\](F)[\] \int_0^a x^3 dx = F(a) = \frac{a^4}{4};$$

3. Propriedades das integrais de funções polinomiais Suponha que seja conhecida a a fórmula $\int_0^a f(t)dt = F(a)$, em que F se chama uma primitiva de f . Na questão anterior descobrimos as primitivas de $f(x) \in \{x, x^2, x^3\}$. Decida se é verdade:

$$(a) \ (V)[\](F)[\] \int_a^0 f(t)dt = F(a)$$

$$(b) \ (V)[\](F)[\] \int_a^0 f(t)dt = -F(a)$$

(c) $(V)[\](F)[\]$ Se forem dados os números reais a, b num domínio onde a integral exista (como área) e se $a < b$ então

$$\int_a^b f(t)dt = \int_0^b f(t)dt - \int_0^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$(d) \ (V)[\](F)[\] \int_a^b t^2 dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$(e) \ (V)[\](F)[\] \int_a^b t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

4. Integral de funções polinomiais Suponha que duas funções polinomiais, f, g sejam integráveis no intervalo $[a, b]$

(a) $(V)[\](F)[\]$ As somas de Riemann mostram que $\int_a^b (f(t) + g(t))dt =$
 $\left(\int_a^b f(t)dt \right) \left(\int_a^b g(t)dt \right)$

(b) $(V)[\](F)[\]$ As somas de Riemann mostram que $\int_a^b (f(t) + g(t))dt =$
 $\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

(c) $(V)[\](F)[\]$ Se ρ for uma constante (um número real) então as somas de Riemann mostram que $\int_a^b \rho f(t)dt = \rho \int_a^b f(t)dt$

$$(d) \ (V)[\](F)[\] \int_a^b 1 + 2x - 3x^2 dx = \int_a^b 1dx + 2 \int_a^b x dx + 3 \int_a^b x^2 dx$$

$$(e) \ (V)[\](F)[\] \int_{-10}^{10} x^2 - 3x^4 dx = \frac{5000}{3}$$