



Disciplina  
Derivada  
prof. T. Praciano-Pereira

Lista 04b, 19 de setembro de 2010  
tarcisio.praciano@gmail.com  
Dep. de Computação UeVA

**alun@:**

www.calculo.sobralmatematica.org

Documento produzido com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 27 de Setembro, segunda-feira, observe o nome do arquivo.

### 0.0.1 Objetivo

Esta lista está baseada na página de apoio à lista 04.

**Palavras chave** Derivada, indução finita, integração, sucessão,

## 0.1 Exercícios

### 1. Binômio de Newton

(a) (V)[](F)[]

$$(a + b)^5 = \sum_{k=0}^5 a^{n-k} b^k$$

(b) (V)[](F)[]

$$(a + b)^5 = \sum_{k=0}^5 C_n^k a^{n-k} b^k$$

(c) (V)[](F)[] Os coeficientes de  $(a + b)^5$  podem ser obtidos da linha de ordem 5 do Triângulo de Pascal

$$C_5^0 = 1; C_5^1 = 5; C_5^2 = 10; C_5^3 = 10; C_5^4 = 5; C_5^5 = 1;$$

(d) (V)[](F)[]

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

(e) (V)[](F)[]

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

### 2. Indução finita

Se verdadeiro, prove ou então ignore!

(a) (V)[](F)[] Observando que

$$1 = 1 \quad (1)$$

$$1 - 4 = -(1 + 2) \quad (2)$$

$$1 - 4 + 9 = (1 + 2 + 3) \quad (3)$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4) \quad (4)$$

$$- \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \left( \sum_{k=1}^n k \right) \quad (5)$$

(b) (V)[](F)[] Observando que

$$1 = 1 \quad (6)$$

$$1 - 4 = -(1 + 2) \quad (7)$$

$$1 - 4 + 9 = (1 + 2 + 3) \quad (8)$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4) \quad (9)$$

então

$$- \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \begin{cases} n \text{ impar} & \sum_{k=1}^n k \\ n \text{ par} & - \sum_{k=1}^n k \end{cases} \quad (10)$$

(c) (V)[](F)[] Observando que

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} \quad (12)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8} \quad (13)$$

então

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 2 - \frac{1}{n^2} \quad (14)$$

(d) (V)[](F)[] Observando que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad (16)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad (17)$$

então

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \quad (18)$$

(e) (V)[](F)[] Lembrando que  $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$  e que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)^2$$

então

$$1^3 + \dots + (n-1)^3 \leq \frac{n^4}{4} < 1^3 + \dots + n^3 \quad (19)$$

Por indução:

$$n = 2; 1 \leq 1 < 5 \text{ é verdadeiro!} \quad (20)$$

$$\text{hipótese: supor válido para } n = k > 2 \quad (21)$$

$$\left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 \leq \frac{k^4}{4} \leq \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \quad (22)$$

$$\text{fazendo } k := k + 1 \quad (23)$$

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 < \left(\frac{(k+1)(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{(k+1)^4}{4} < \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \quad (24)$$

Mostrando que a desigualdade (19) vale para todo  $n \geq 2$ .

### 3. Valor absoluto

(a) (V)[](F)[] Para qualquer número real  $x$  é verdade que

$$|x| = \text{sinal}(x) * x;$$

A função  $\text{sinal}(x)$  é definida como

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} x \geq 0 & 1 \\ x < 0 & -1 \end{cases} \quad (25)$$

e você pode testar usando gnuplot com a definição

$$\text{sinal}(x) = (x < 0) ? -1 : 1;$$

que equivale a

Se  $(x < 0)$  então  $-1$  ou então  $1$

(b) (V)[](F)[] Se  $x \neq 0$  então  $\text{sinal}(x) = \frac{x}{|x|}$

$$(c) \text{ (V)[](F)[] } f(x) = |x+3| + |x-4| = \begin{cases} x < -3 & -2x + 1 \\ x \in [-3, 4] & = 7 \\ x > 4 & 2x - 1 \end{cases}$$

e a definição desta função em gnuplot é

$$f(x) = (x < -3) ? (-2*x + 1) : (x < 4) ? (7) : (2*x - 1);$$

e fazendo os gráficos de  $f$  e de  $-2x + 1, 2x - 1$  você pode verificar se a questão está certa.

(d) (V)[](F)[] A função definida no item 3c não tem derivada para dois valores de  $x \in \{-3, 4\}$  porque, nestes pontos existe duplicidade de retas tangentes. Faça o gráfico com gnuplot.

(e) (V)[](F)[] A derivada da função definida no item 3c é  $f'(x) = 2x$

### 4. Derivada e módulo

(a) (V)[](F)[] A função

$$f(x) = |(x+3)(x-4)| + |(x+3)(4-x)|$$

tem derivada em qualquer valor  $x$  do seu domínio.

(b) (V)[](F)[] Há dois pontos do domínio de

$$f(x) = |(x+3)(x-4)| + |(x+3)(4-x)|$$

em que ela não tem derivada, porque neste pontos há duplicidade de retas tangentes, são os pontos  $x \in \{-3, 4\}$ . Se estes pontos forem excluídos do domínio de  $f$  então

$$f'(x) = \begin{cases} x < -3 & h(x) = 4 * x - 2; \\ x \in (-3, 4) & -h(x); \\ x > 4 & h(x); \end{cases} \quad (26)$$

e você pode definir a derivada para gnuplot com

$$h(x) = 2*x**2 - 2*x - 24$$

$$df(x) = (x < -3) ? h(x) : (x < 4) ? -h(x) : h(x)$$

O gráfico de  $y = f(x)$  está na figura (1) página 4,

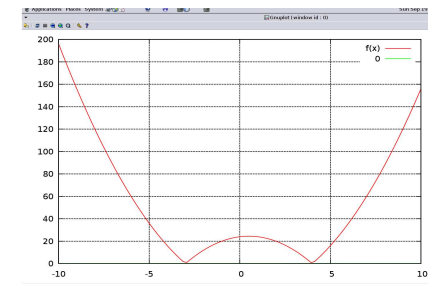


Figura 1:

(c) (V)[](F)[] Se  $f(x) = x^2, g(x) = x + 3$  então

$$(f(g(x)))' = 2x(x+3) \quad (27)$$

$$(g(f(x)))' = x^2 \quad (28)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 3$  então

$$(f(g(x)))' = 2g(x)g'(x) = 2(x + 3) \quad (29)$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = 2x \quad (30)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Para uma lista arbitrária de números reais  $a_1, \dots, a_n$  vale

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

e isto é comumente parafraseado com “a soma dos módulos é maior do que o módulo da soma”.

5. Integral e derivada  $f(x) = |(x + 4)(2 - x)| + x^2 - 4$

(a) (V)[ ](F)[ ]  $f$  é uma função derivável na reta inteira.

(b) (V)[ ](F)[ ] Há dois pontos em que  $f$  não é derivável por existir nelas duas retas tangentes, consequentemente o domínio de  $f'$  é  $\mathbf{R} - \{-4, 2\}$ .

(c) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de  $f$  esta na figura (2) página 5, e

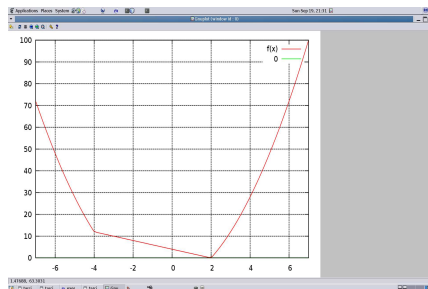


Figura 2:

$$\int_{-4}^2 f(x)dx = \int_{-4}^2 (x^2 - 4)dx = 50$$

(d) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de  $f$  esta na figura (2) página 5, e

$$\int_{-4}^2 f(x)dx = \int_{-4}^2 (-2x + 4)dx = 50$$

(e) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de  $f$  esta na figura (2) página 5,

e

$$\int_{-4}^2 f(x)dx = 36$$

6. Integral e derivada A função

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{|x + 1| + |x - 3| - 2}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] não está definida para  $x \in \{-1, 3\}$

(b) (V)[ ](F)[ ] se anula quando  $x \in \{0, 2\}$  e o seu domínio é a reta real.

(c) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de  $f$  se encontra na figura (3) página 6,

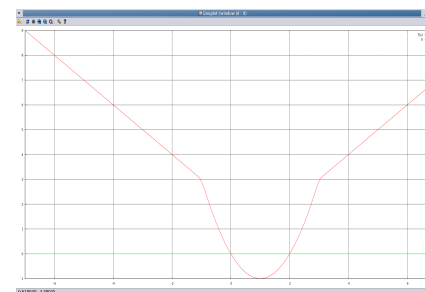


Figura 3:

(d) (V)[ ](F)[ ] O domínio da derivada de  $f$  é  $\mathbf{R} - \{0, 2\}$

(e) (V)[ ](F)[ ] O domínio da derivada de  $f$  é  $\mathbf{R} - \{-1, 3\}$  e  $\int_{-1}^3 f(x)dx = \frac{4}{3}$