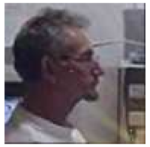

Cálculo I **Lista número 08** 4 de novembro de 2010

Integral e derivada **tarcisio.praciano@gmail.com**

prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org

Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 07, de Novembro, segunda-feira.

Palavras chave cálculo aproximado da integral, derivada, desenvolvimentos polinomiais, funções definidas com a integral, integral de funções polinomiais, integral definida, integral indefinida, interpretação geométrica da derivada,interpretação geométrica da integral,

1.0.1 Objetivo

Verificação de conhecimento para terceira avaliação parcial.

Além de verificação do conhecimento, esta lista @ conduz a fazer alguns experimentos baseados em gráficos para descobrir regras de derivação, por exemplo a chamada de *mudança de variável*.

Nesta lista estão aparecendo alguns conceitos novos, nomes de teoremas que ainda não apareceram em aula. Os nomes dos teoremas ou a redação deles não é necessária para o trabalho, mas eu vou me referir aos mesmos numa próxima aula e o seu trabalho nesta lista os tornará mais claros. Você também pode encontrá-los fazendo uma busca na Internet, depois que resolver as questões, não antes.

Os gráficos que aparecem nas questões foram feitos *manualmente* usando `xfig`, um editor de gráficos, e não são precisos, mas representam bem aquilo se pretende com eles.

Leia rapidamente esta introdução, e depois retorne para ler alguns tópicos ligados a cada questão quando o momento sugerir.

A **única** forma que temos para calcular formalmente uma integral é colocá-la (transformá-la) para se adequar ao Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a); F' = f$$

Com este objetivo existem diversos *métodos de integração* a um dos quais se dedica a questão 4^a). Na questão 5^a) uma transformação é feita usando a relação de derivada e primitiva que existe entre *seno, coseno*, assim é possível transformar uma integral de funções trigonométricas em integral de funções algébricas.

1. Primeiro vou exemplificar usando uma fator de escala com interpretação geométrica nas questões 3^a) e 4^a).

   O efeito da escala num gráfico e o fator desta escala no cálculo da integral.

   Você vai encontrar integrais do tipo $\int_a^b f(\lambda x)dx$ para comparar com a integral $\int_a^b f(x)dx$. O fator λ não pode sair do parentese que contém o parâmetros de f a não ser em um determinado caso, quando f for "linear", porém com uma transformação adequada é possível contornar este problema e estabelecer uma relação em que o parâmetro λ fica multiplicando uma integral. Olhe a 4^a) questão. É o objetivo das questões 3^a) e 4^a).

2. Na questão 5^a) o fator de escala não será mais numérico, será uma outra função: o seno ou coseno.

É importante que você construa os gráficos das funções envolvidas durante a sua análise das questões. Ver os gráficos irá ajudá-l@ a *permanentemente* manter em sua memória as relações que estou lhe apresentando nesta lista.

Na questão 6^a) eu vou comparar algumas funções com a exponencial, usando o desenvolvimento de Taylor. Esta comparação servirá para alertá-lo da relação de crescimento que existe entre funções

polinômiais e a exponencial. É uma questão que retornará mais a frente, quando você estudar *analise algoritmos*. Uma das formas de classificar os algoritmos consiste em associar uma expressão à *quantidade de tempo* de processamento do algoritmo e desta forma dividir os algoritmos entre os que requerem uma *quantidade de tempo polinomial* ou *não polinomial* (pelo menos). Não vou discutir *classificação de algoritmos*, mas as comparações que vou fazer com limite estão próximas da metodologia que você irá precisar posteriormente. Para mim, aqui, este discurso sobre a *análise de algoritmos* é uma "motivação" para que você procure entender *limite*.

Vou usar

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1.1}$$

A 7^a) questão lida com o desenvolimento de Taylor do logaritmo. Nem sempre podemos obter o polinômio de Taylor de uma função, por exemplo, do logaritmo na origem, porque $y = ln(x)$ não está definido na origem. Na questão 7^a) vou mostrar-lhe alternativas para usar polinômio de Taylor com a função logaritmo. Ela tem polinômio de Taylor em qualquer ponto, fora o zero. O programa `exer08_07_e.calc` pode ser usado como um laboratório, troque o ponto $x = a$ onde o desenvolvimento for feito para estudar a diferença de comportamento.

A expressão genérica para a fórmula de Taylor do logaritmo é

$$ln(x) \approx ln(a) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(x-a)^k/(ka^k); |x| < a; \tag{1.2}$$

Válida para todo $a > 0$; e para $|x| < a$.

O programa `exer08_07_e.calc` tem o desenvolvimento de Taylor do logaritmo natural no ponto $x = a$ lhe permitindo selecionar a potência n do polinômio e compara `Ln(x,a,n)` o valor do polinômio de Taylor de grau n desenvolvido no ponto $x = a$ com `ln(x)` o valor interno para logaritmo de `calc`.

Como logaritmo tem um *ponto crítico*, $a = 0$ este exemplo é interessante para entender como funciona o desenvolvimento de Taylor. Perto do *ponto crítico* os desenvolvimentos de Taylor tem um comportamento muito ruim. Por exemplo:

```
 print  Ln(2, 1, 50);
0.68324716057591818843
print  ln(2);
0.693147180559945309
```

um erro 0.01

Agora, usando a mais afastado do ponto crítica, por exemplo $a = 10$

```
print  Ln(10.1, 10, 50);
2.31253542384721376687
print  ln(10.1);
2.31253542384721376687
```

O polinômio de Taylor oferece um valor igual ao logaritmo interno do `calc`. Outro exemplo

```
print  Ln(12, 10, 50);
2.48490664978800031023
print  ln(12.1);
2.49320545260269540411
```

com um erro 0.01 (observe) longe do ponto de desenvolvimento, portanto um erro razoável.

Discuta com o professor esta questão. Procure entender as experiências feitas com o cálculo do logaritmo descertitas acima, e faça experiências com o programa citado.

As questões 8^a) 9^a) 10^a) objetivam relembrar regras de derivação, o significado geométrico da derivada e da integral. Se você escrever as justivicativas, terá um resumo dos principais resultados estudos em Cálculo I.

1.1 Exercícios

1. função polinomial $f(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$ Represente graficamente esta função para ajudá-l@ a decidir quais as alternativas são verdadeiras, mas a justificativa não deve ser uma simples descrição do que acontece no gráfico.

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $f'(x) = 0$ então $x < -3$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $f'(x) = 0$ então $x \in [-3, 1]$ ou $x \in [1, 5]$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Teorema de Rolle: Existe um ponto $\underline{c}$; $c < -3$ tal que $f'(c) = 0$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Teorema de Rolle: Existe um ponto $\underline{c}$; $c \in [-3, 1]$ tal que $f'(c) = 0$.

(e) (V)[ ](F)[ ] Teorema do valor médio: $f(-4) = -45$; $f(6) = 45$; existe um ponto $\underline{c}$; $c \in [-4, 6]$ tal que

$$f'(c) = \frac{90}{10} = 9$$

2. A integral e a derivada $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

(a) (V)[ ](F)[ ] $f'(x) = \sin(2x)$

(b) (V)[ ](F)[ ] Teorema de Rolle Existe um ponto $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $f'(c) = 0$.

(c) (V)[ ](F)[ ] $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\pi} \cos(x)dx = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$;

(d) (V)[ ](F)[ ] $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$;

(e) (V)[ ](F)[ ] $\begin{cases} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx = 2; & \int\limits_0^{2\pi} \cos(x)dx = 0; \\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx = 0; & \int\limits_0^{2\pi} \sin(x)dx = 2; \end{cases}$

3. Transformações de variáveis Deduza as verdadeiras, do gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x < -1 & 0; \\ x \in [-1, 0] & x + 1; \\ x \in [0, 1] & 1 - x; \\ x > 1 & 0; \end{cases} \tag{1.3}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de f está na figura Na figura (1.1) página 4,

(b) (V)[ ](F)[ ] Na figura (1.1) página 4, se encontra o gráfico de $1 - f$.

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 1$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-10}^{10} f(x)dx = 1$

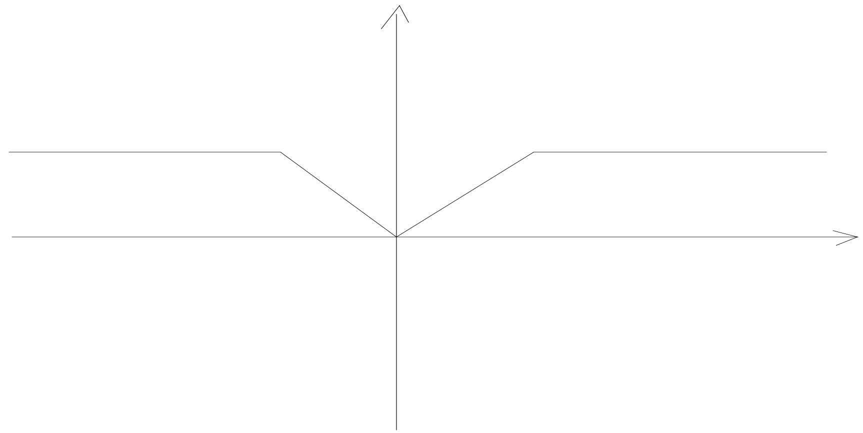

Figura 1.1: O gráfico de f

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$

4. Algumas regras de integração Alguns experimentos irão revelar certas regras. A função $y = f(x)$ está definida pela equação (3), entretanto é preciso ser cuidados@ ao estabelecer "leis" a partir de experimentos. Demonstrações são necessárias.

(a) (V)[ ](F)[ ] $g(x) = f(x/2)$, o gráfico de $y = g(x)$ está na figura (1.2) página 4.

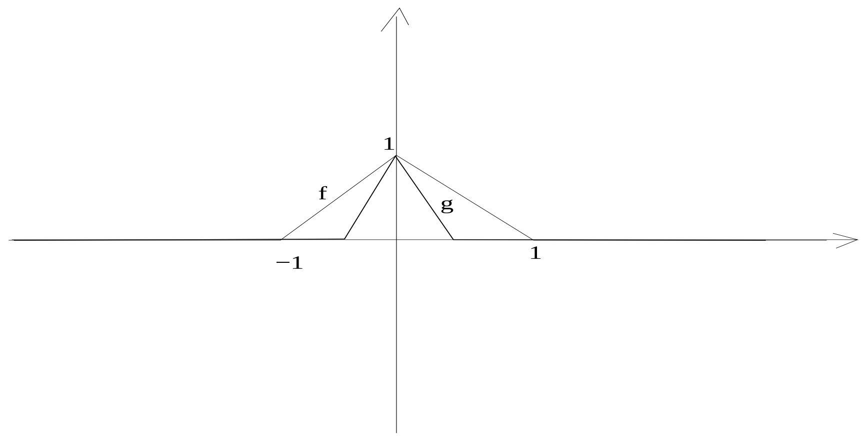

Figura 1.2: Gráfico de uma dilação

(b) (V)[ ](F)[ ] $g(x) = f(2x)$, o gráfico de $y = g(x)$ está na figura (1.2) página 4.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $g(x) = f(2x)$ então

$$I = \int_{-0.5}^{0.5} g(x)dx = \int_{-0.5}^{0.5} f(2x)dx = \tag{1.4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} f(2x)d(2x) = \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx = 0.25 \tag{1.5}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $g(x) = f(2x)$ então

$$I = \int_{-0.5}^{0.5} g(x)dx = \int_{-0.5}^{0.5} f(2x)dx = \tag{1.6}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} f(2x)d(2x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.5 \tag{1.7}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] $y = g(x) = f(x/2)$

$$I = \int_{-2}^{2} g(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x/2)dx = \tag{1.8}$$

$$I = 2\int_{-0.5}^{0.5} f(x/2)d(x/2) = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 \tag{1.9}$$

5. O Teorema Fundamental do Cálculo

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$u(x) = sin(x); du = cos(x)dx; \tag{1.10}$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)dx = \int_{0}^{1} udu = \frac{1}{2}; \tag{1.11}$$

$$\tag{1.12}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx \tag{1.13}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)d2x = \int_{0}^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{1.14}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx \tag{1.15}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin(2x)d2x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} \sin(t)dt = \tag{1.16}$$

$$I = -\frac{1}{2}cos(t)|_{0}^{\pi/2} = 1 \tag{1.17}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_{0}^{2\pi} sin(2x)dx \tag{1.18}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin(2x)d2x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{1.19}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \sin^2(x)dx \tag{1.20}$$

$$\int_{0}^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_{0}^{2\pi} dx = 2\pi \tag{1.21}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi \tag{1.22}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_{0}^{2\pi} sin(2x)dx \tag{1.23}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin(2x)d2x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{1.24}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \sin^2(x)dx \tag{1.25}$$

$$\int_{0}^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_{0}^{2\pi} dx = 2\pi \tag{1.26}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi \tag{1.27}$$

6. Limite e crescimento

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $P(x)$ for um polinômio de grau $\underline{n}$ e $Q(x)$ for um polinômio de grau $\underline{m}$ então $n < m \Rightarrow \lim_{x=\infty} \frac{P(k)}{Q(k)} = \infty$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $P(x)$ for um polinômio de grau $\underline{n}$ e $Q(x)$ for um polinômio de grau $\underline{m}$ então $n < m \Rightarrow \lim_{x=\infty} \frac{P(k)}{Q(k)} = 0$

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $P(x)$ for um polinômio de grau $\underline{n}$ e $Q(x)$ for um polinômio de grau $\underline{m}$ então

$$n = m \Rightarrow \lim_{k=\infty} \frac{P(k)}{Q(k)} = A;$$

A é diferente de zero, é o quociente dos *coeficientes líderes* de de P e de Q, tomados na mesma ordem como estiverem P e de Q na expressão.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $P(x)$ for um polinômio de grau $\underline{n}$ então

$$\lim_{k=\infty}\frac{P(k)}{e^x}=\infty$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $P(x)$ for um polinômio de grau $\underline{n}$ então

$$\lim_{k=\infty}\frac{P(k)}{e^x}=0$$

A função exponencial cresce mais rápido do que qualquer polinômio.

7. As derivadas do logaritmo

(a) (V)[ ](F)[ ] As primeiras n derivadas de $y=ln(x)$, começando com a derivada de ordem zero, são $\begin{cases} 0 & ln(x) \\ 1 & \frac{1}{x} \\ 2 & -\frac{1}{x^2} \\ 3 & \frac{2}{x^3} \\ 4 & -\frac{3!}{x^4} \\ & \dots \\ n & \frac{n!}{x^{n+1}} \end{cases}$

(b) (V)[ ](F)[ ] As primeiras n derivadas de $y=ln(x)$, começando com a derivada de ordem zero, são $\begin{cases} 0 & ln(x) \\ 1 & \frac{1}{x} \\ 2 & -\frac{1}{x^2} \\ 3 & \frac{2}{x^3} \\ 4 & -\frac{3!}{x^4} \\ & \dots \\ n & (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \end{cases}$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$ln(x)\approx\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}((k-1)!)(x)^k \tag{1.28}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$ln(x)\approx\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}((k-1)!)(x-1)^k;|x|<1; \tag{1.29}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$ln(x)\approx\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(x-1)^k/k;|x|<1; \tag{1.30}$$

O programa `exer08_07_e.calc` implementa este polinômio de Taylor e compara os resultados com a função `ln` nativa de `calc`.

8. Derivada e Primitiva

(a) (V)[ ](F)[ ] $f(x)=\frac{\sin(x)}{1+x^2}$ então $f'(x)=\frac{\cos(x)(1+x^2)-2x\sin(x)}{1+x^2}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $f(x)=\frac{\sin(x)}{1+x^2}$ então $f'(x)=\frac{\cos(x)(1+x^2)-2x\sin(x)}{1+2x^2+x^4}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $y'=2|x|$ então $f(x)=\begin{cases} x<0 & -x^2 \\ x\geq 0 & x^2 \end{cases}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $y'=2|x|$ então $f(x)=\begin{cases} x<0 & -x^2+C_1 \\ x\geq 0 & x^2+C_2 \end{cases}$ e as constantes C_1,C_2 podem ser diferentes.

(e) (V)[ ](F)[ ] $y'=x^2$ então $y=\frac{x^3}{3}+C$

9. Integral e derivada

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\sin(x)dx=xcos(x)|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos(x)dx=-2 \tag{1.31}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\sin(x)dx=-xcos(x)|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos(x)dx=2 \tag{1.32}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}x\cos(x)dx=1$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}x\cos(x)dx=0$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-a}^{0}x^2dx=\frac{a^2}{3}$

10. Gráficos, derivada e integral

Se $f(x)=\frac{x^2-9}{|x+3|+|x-3|}$

(a) (V)[ ](F)[ ] Os pontos $-3,3$ não pertencem ao domínio de f.

(b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de f é o conjunto de todos os números reais.

(c) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $y=f(x)$ é o que se encontra na figura (1.3) página 9,

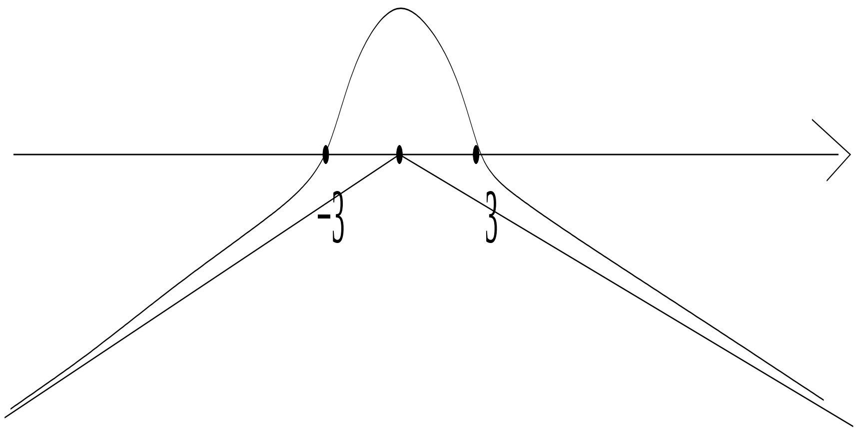

Figura 1.3: gráfico de $y = f(x)$

(d) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $y = f(x)$ é o que se encontra na figura (1.4) página 10,

(e) (V)[ ](F)[ ] Na figura (1.5) página 10, se pode ver os gráficos de f de f', (aproximadamente - leitura gráfica).

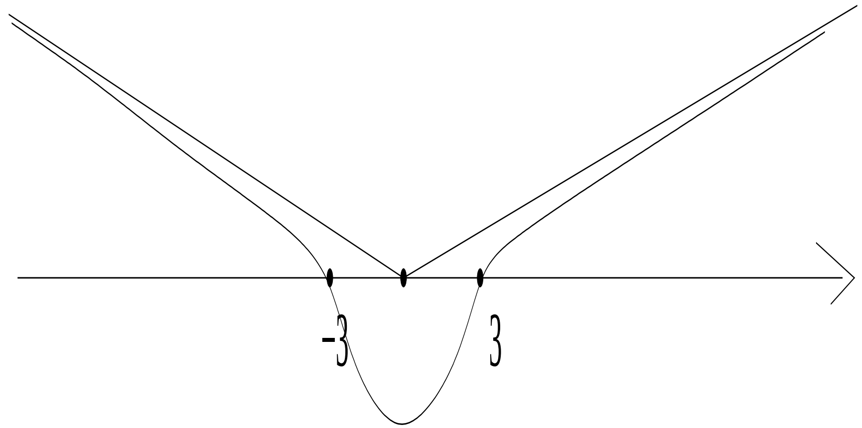

Figura 1.4: gráfico de $y = f(x)$

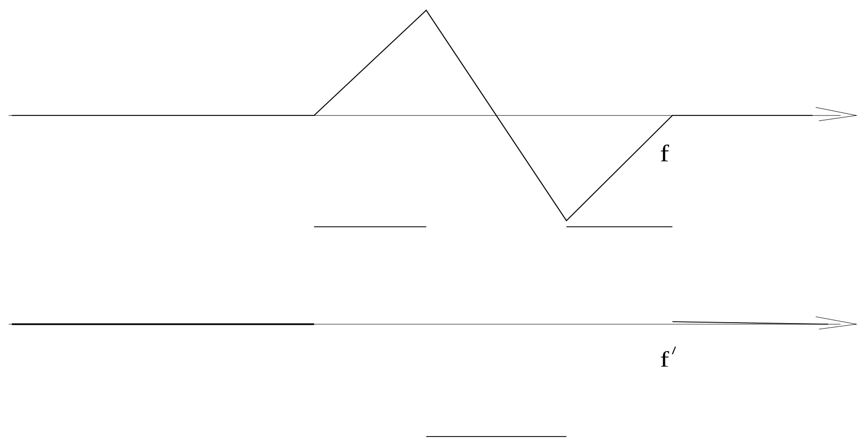

Figura 1.5: Gráficos de f e de f'