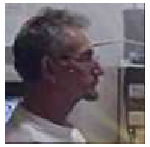

Cálculo I — **NAF** 9 de novembro de 2010

Integral e derivada — **tarcisio.praciano@gmail.com**

prof. T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org

Documento produzido com LaTeX — sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data terça-feira, 9 de novembro de 2010.

0.0.1 Objetivo

Uma oportunidade final para melhorar sua nota!

Esta prova contém cinco questões de múltipla escolha e cada questão vale 2 (dois) pontos. Uma questão será considera correta se você selecionar **todas** as opções verdadeiras e escrever uma *rápida* justificativa para defender a sua escolha *mostrando que você não selecionou ao acaso.*

A prova começa 19:00 e termina 21:30, mas a data da entrega é dia 15 de Novembro, na secretária do curso de Computação, em papel, ou por e-mail.

Você tem irrestrita liberdade de trabalho, mas tem que entregar a sua prova individual. Se quiser entregar em papel, use o verso da prova para colocar as justificativas indicando, corretamente, a correspondência entre a justificativa e a questão.

Sem justificativa sua seleção é nula e ela *será analisada*.

Palavras chave integral, derivada, coeficientes de Fourier, polinômio de Taylor.

0.1 Exercícios

1. Signficado geométrico da derivada A função f tem seu o gráfico na figura (1).

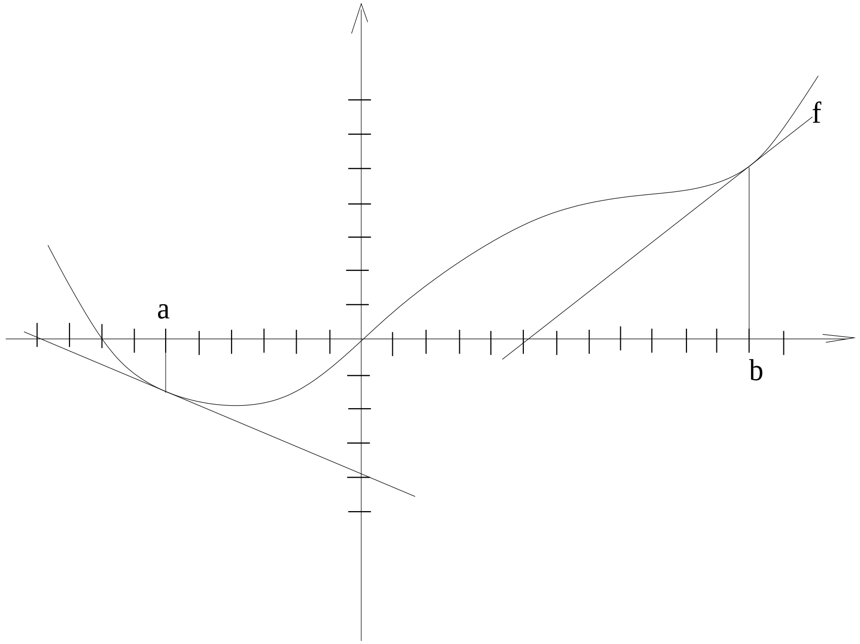

Figura 1: $graf(f)$ com retas tangentes

(a) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular instantâneo de f no ponto $(a, f(a))$ é $f'(a)$, um número positivo e isto significa que o gráfico de f passa no ponto $(a, f(a))$ "crescendo".

(b) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular instantâneo de f no ponto $(b, f(b))$ é $f'(b)$, um número positivo o que significa que o gráfico de f passa no ponto $(b, f(b))$ "crescendo".

(c) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de f é tangente á reta $y = f'(0)x$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Considerando que as marcas que aparecem nos eixos, na figura (1), representem os inteiros, é possível concluir que $\int_b^a f(x)dx$ é positiva.

(e) (V)[ ](F)[ ] Considerando que as marcas que aparecem nos eixos, na figura (1), representem os inteiros, é possível concluir que $\int_b^a f(x)dx$ é negativa.

2. Binômio de Newton

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$(p+q)^4 = p^2 + 2pq + q^4$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$(p-q)^4 = p^4 - 4p^3q + 6p^2q^2 - 4pq^3 + q^4$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Os coeficientes do binômio de Newton $(a+b)^n$ são retirados da linha de ordem $\underline{n}$ do Triângulo de Pascal

1 -> $(p+q)^0$
1 1 -> $(p+q)^1$
1 2 1 -> $(p+q)^2$
1 3 3 1 -> $(p+q)^3$
1 4 6 4 1 -> $(p+q)^4$
1 5 10 10 5 1 -> $(p+q)^5$
1 6 15 20 15 6 1 -> $(p+q)^6$
1 7 21 35 35 21 7 1 -> $(p+q)^7$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5p^2q^4 + q^5;$$

3. Derivada e integral

(a) (V)[ ](F)[ ]Se $f(x) = (x+3)(3-x)^2$ então

$$f'(x) = (3-x)^2 + 2(x+3)(x+2)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = (x+3)(3-x)^2$ então

$$f'(x) = (3-x)^2 - 2(x+3)(3-x)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ e u, v forem funções deriváveis, então $f'(x) = \frac{u(x)v'(x)-u'(x)v(x)}{v(x)v(x)}$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = \sin(u(x))$ e $u(x)$ for uma função derivável, então $f'(x) = \cos(u(x))u'(x)$.

(e) (V)[ ](F)[ ]método de integração Se $u(x)$ for uma função diferenciável e sobrejetiva definida no intervalo $[a,b]$ com valores no intervalo $[c,d]$ então é possível mudar a variável na integral de modo a ter a igualdade

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt; c = u(a); d = u(b);$$

Se a segunda integral for mais fácil de ser calculada isto representa uma forma de calcular a primeira integral chamada de “mudança de variável”, por exemplo:

$$\int_0^{\pi/2} cos(x)sin(x)dx = -\int_1^0 udu; \quad (1)$$

$$u(x) = cos(x); du(x) = -sin(x)dx; cos(0) = 1; cos(\pi/2) = 0; \quad (2)$$

$$-\int_1^0 udu = -\frac{u^2}{2}|_1^0 = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi/2} cos(x)sin(x)dx = \frac{1}{2} \quad (4)$$

4. Derivada e integral

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$\mathbf{e} \approx 1 + 1 + \cdots + 1/n! \ ; \ n \geq 2$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$\mathbf{e} \approx 1 - 1 + \cdots + (-1^n)/n! \ ; \ n \geq 2$$

(c) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{cases} I(a) = \int_0^a xf(x)dx = \\ I(a) = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{1+x^2}dx; u = 1+x^2; du = 2x; \\ I(a) = \frac{1}{2}\int_1^{1+a^2} \frac{du}{u} = \frac{ln(1+a^2)}{2} = ln(\sqrt{1+a^2}); \end{cases}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = ln(x)$ e se $a, b > 0$ então

$$\begin{cases} \int_a^b ln(x)dx = \\ = x\ln(x)|_a^b - \int_a^b dx = \\ = b\ln(b) - a\ln(a) - (b-a) = F(b) - F(a) \\ F(x) = x\ln(x) - x; \end{cases}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Uma equação diferencial. A função $f(x) = e^{ix}$ é uma solução da equação diferencial $y + y'' = 0$.

5. Polinômios trigonométricos - A teoria necessária para esta questão. Os polinômios trigonométricos são parecidos com os *Polinômios de Taylor* mas usamos $\sin, \cos$ em vez de polinômios para obter a expressão

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \approx f(x)$$

Aceite isto e depois leia mais a respeito usando a palavras chave *polinômio trigonométrico, série de Fourier*, para ver onde se aplicam. As fórmulas para calcular os coeficientes são

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{5}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \tag{6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \tag{7}$$

Considere $f(x) = \|x\|$ e os coeficientes a_k e b_k são os coeficientes de Fourier de f tal que $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \approx f(x)$ é o polinômio trigonométrico de ordem $\underline{n}$ de f no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = \pi$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = \frac{\pi}{2}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = -4/\pi$;

(d) (V)[ ](F)[ ] $b_1 = 0$;

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x\| cos(2x)dx = \tag{8}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \|x\| cos(2x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} xcos(2x)dx = \tag{9}$$

$$= \frac{2}{4\pi} \int_{0}^{\pi} 2xcos(2x)d(2x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} ucos(u)du = \tag{10}$$

$$= usin(u)|_0^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi} sin(u)du = \tag{11}$$

$$= 0 + cos(u)|_0^{2\pi} = 0 \tag{12}$$

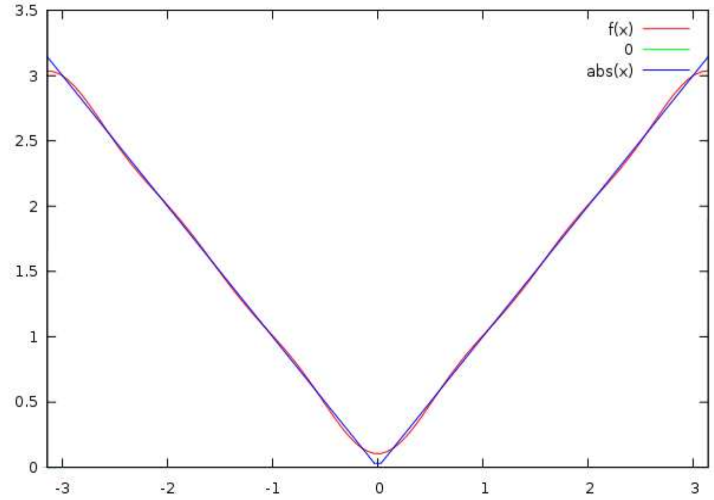

Figura 2: Gráfico de um polinômio trigonométrico de ordem 5

O programa "`exer_naf_05.gnuplot`" mostra o gráfico deste polinômio trigonométrico, procure no link "programas". Na figura (2) página 6, você pode ver o gráfico feito com este programa, um polinômio trigonométrico de ordem 5.